



Sパラメータによる電子部品の評価

アプリケーションセンター 藤城義和

2007.May.23 AN-SP06A001_ja

このアプリケーションノートは、T D Kの情報誌 PRODUCT HOTLINE MAGAZINE (現在は廃刊)に、1999年~2000年にかけて入門シリーズとして連載された記事(*)をまとめたものである。

(*) 初出

- 「Sパラメータによる電子部品の評価 第1回 Sパラメータの定義と性質」, T D Kの情報誌 THE HOTLINE, vol. 31, pp. 28-32, 1999 April
- 「Sパラメータによる電子部品の評価 第2回 S行列の例」, T D Kの情報誌 PRODUCT HOTLINE MAGAZINE, vol. 32, pp. 25-31, 1999 July
- 「Sパラメータによる電子部品の評価 第3回 基準インピーダンスの変更」, T D Kの情報誌 PRODUCT HOTLINE MAGAZINE, vol. 33, pp. 27-33, 1999 September
- 「Sパラメータによる電子部品の評価 第4回 モード変換」, T D Kの情報誌 PRODUCT HOTLINE MAGAZINE, vol. 34, pp. 23-33, 2000 January
- 「Sパラメータによる電子部品の評価 第5回 モード変換(続)」, T D Kの情報誌 PRODUCT HOTLINE MAGAZINE, vol. 35, pp. 17-32, 2000 April
- 「Sパラメータによる電子部品の評価 第6回 まとめ」, T D Kの情報誌 PRODUCT HOTLINE MAGAZINE, vol. 36, pp. 20-24, 2000 July

T D Kでは回路シミュレーション用として、1997年よりSパラメータデータライブラリを提供しているが、その普及を図るため、Sパラメータの解説を試みた。それが左記の連載記事である。当時は、平衡デバイスの評価方法が不明確だった(下記囲み参照)ので、コモンモードフィルタの4ポートSパラメータデータや等価回路の公開(1999年9月)に際し、いくばくかでも理解してもらえるよう、それまでの知見をまとめたのである。

ミックスドモードSパラメータを導出し、またそれと基準インピーダンスとの関係(common/differentialモードとeven/oddモードの違いなど)を明らかにした。そして、コモンモードフィルタの4ポート解析を例にとり、上記不明確点に回答を与えた。当時はコモンモードフィルタをSパラメータで評価することがなかったので、その解説には特に多くの紙数を割いた。

当時、筆者が不明確と思っていた点

- コモン/ディファレンシャルモードと平衡/不平衡モードが混用されていて、わかりにくい。どちらのモードも有用なのだが、それらを区別して適所で使う必要がある。
- 平衡デバイスのディファレンシャルモード特性は、従来、 balan やトランスなどをかませて測定するという手法がとられることが多かったが、それとミックスドモードSパラメータはどのような関係にあるのか。また、その際、balan は中間タップをどう処理したらいいのか、balan やトランスの巻き数比はいくつが正しいのか、終端インピーダンスは何Ωにすべきなのか。
- 平衡デバイスに限ったわけではないが、インピーダンスという評価量とSパラメータという評価量の関係は、どのような関係にあるものなのか。



Sパラメータの定義と性質

電子部品事業本部
藤城義和

電子部品の高周波特性はSパラメータで評価されることが多い。 $|S_{21}|$ をフィルタの挿入損失特性として活用するのは、その端的な例である。しかしSパラメータは、そういった直接的な意味合い以外にも、もっと豊富な情報を内在させている。そこで本稿では4回の連載を通じ、Sパラメータの応用という側面から捉えた電子部品の評価方法について解説する。初回はおさらいである。Sパラメータの定義と性質について述べる。

1. はじめに

近年、電子回路の設計はその初期段階をコンピュータシミュレーションで行なうことが一般的になってきた。それに伴い、電子部品の特性データもそのシミュレーションに適用できる形で提供して欲しいという要求が増えている。このようなニーズに対する回答のひとつとして、TDKでは実測のSパラメータのデータ集、「TDK S-parameter Data Library」を自社web site(<http://www.tdk.co.jp/tjbca01/index.htm>)上で公開している。

TDK S-parameter Data Libraryを使用することにより、高周波回路の挙動を、電子部品の非理想性因子を含めてシミュレーションすることが可能になる。しかし、使い方はそういったことに限られているわけではない。TDK S-parameter Data Libraryが電子部品の実測データだということを利用して、その単品の特性評価にも役立てられる。例えば電子部品の持っている寄生成分(損失や自己共振など)が、どの程度あるかを見積もることができる。すなわちTDK S-parameter Data Libraryを一種のカatalogデータとみなすのである。ただ、Sパラメータの数値そのものを見ただけでは、必ずしも所望の情報が得られるわけではない。そこで本稿では、Sパラメータを電子部品の評価にどのように使ったらよいかを解説する。評価方法とその計算原理、および回路シミュレータの活用の仕方を例題を交えて紹介する。

2. Sパラメータとは何か

Sパラメータは、高周波という特殊な世界で使われるものだけに、一般にはなじみが薄いようである。そこでまず「Sパラメータとは何か」ということを大胆に簡略化して説明する。

SパラメータのSはscattering(散乱)のSである。以下に示すように、Sパラメータは何個かを組にして行列の形で表現することもあるが、その場合はS行列(あるいは散乱行列)という。こ

こでは2ポートの場合について説明する。2つのポート(出入口)を持つブラックボックスに、交流信号という波が入り出す状況を想定する。その波の反射や透過具合で、ブラックボックスを表わしたものがSパラメータである。ポート1から入射した波が自身のポートに反射してくる度合いが S_{11} 、ポート2へ透過していく度合いが S_{21} 、反対にポート2から入射した波が自身のポートに反射してくる度合いが S_{22} 、ポート1へ透過していく度合いが S_{12} である。2ポートの(線型な)ブラックボックスはこの4つのSパラメータで完全に表わすことができる。

ブラックボックスはこの他に電流、電圧の関係を用いたZパラメータやYパラメータなどでも表現できる。それらのパラメータとSパラメータは相互に変換可能である。またポート数が多くなっても2ポートの場合を拡張して同じように定義できる。

以上の事柄を数式を用いて表現すると次のようになる。

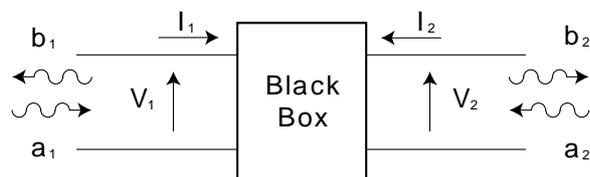
3. 回路行列の定義と性質

この章では、回路行列(S行列やZ行列、Y行列のこと)の定義と性質について簡潔に述べる。紙面の都合上、多くの法則を証明抜きで挙示しているが、詳細な説明や証明は章末で紹介している参考書⁽¹⁾を参照のこと。

3-1. 2ポート回路行列の定義

2ポート回路網の各ポートの電流と電圧を図1のように定義する。

電流、電圧、波振幅(図1)



これらの電流、電圧の関係は2×2の行列で表現されるが、独立変数と従属変数の選び方で、いくつかの種類があり、場合によって使い分けられる。以下に示すインピーダンス行列(Z行列)、アドミッタンス行列(Y行列)、基本行列(F行列)はその代表的なものである。

インピーダンス行列 Z

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad V = ZI \dots\dots\dots(3 \cdot 1)$$

アドミッタンス行列 Y

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad I = YV \dots\dots\dots(3 \cdot 2)$$

基本行列 F

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3 \cdot 3)$$

また変数として、電流、電圧の線型結合である波振幅(a₁、a₂、b₁、b₂)を用いることもできる(図1)。波振幅は入射波や反射波の電力(の平方根)を表わしている。これらの入射、反射の波振幅の関係も同様に2×2の行列で表現できる。それがS行列あるいはT行列である。それらは特性インピーダンスZ₀₁、Z₀₂の半無限長線路を通して励振したときの応答と解釈される。

S行列 S

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad b = Sa \dots\dots\dots(3 \cdot 4)$$

T行列 T

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3 \cdot 5)$$

Z、Y、S行列は同様の定義でnポートに拡張可能である。またF、T行列も2nポートに一般化できる。

この他、ハイブリッド行列H、G=H⁻¹、あるいは反復パラメータ、映像パラメータ、平衡・不平衡パラメータなども、一種の回路表現と考えられるが、ここでは割愛する。

(3・1)、(3・2)、(3・4)に太字で書いた式は、同じ内容を行列の記号で表わしたもので、V、Iは電圧、電流ベクトルを、a、bは入力波、反射波の波振幅ベクトルを表わしている(注意：この節でのIは電流ベクトルを表わしているが、同じ記号を次節以降では単位行列として使う。次節以降では電流ベクトルは出てこないで混乱はない)。V、Iとa、bは次のような関係にある。

$$a = (\hat{V} + \hat{I})/2 \quad b = (\hat{V} - \hat{I})/2 \dots\dots\dots(3 \cdot 6)$$

$$\hat{V} = a + b \quad \hat{I} = a - b \dots\dots\dots(3 \cdot 7)$$

ただし、 \hat{V} 、 \hat{I} は、

$$\hat{V} = Y_0^{1/2} \cdot V \quad \hat{I} = Z_0^{1/2} \cdot I \dots\dots\dots(3 \cdot 8)$$

のことである。

ここでZ₀₁=1/Y₀₁、Z₀₂=1/Y₀₂は各ポートの基準インピーダンス(これは入射波、反射波の特性インピーダンスに対応している)、Z₀、Y₀はそれらに対角要素に並べた行列を表わす。基準インピーダンスは正の実数とする⁽²⁾。

$$Z_0 = \begin{bmatrix} Z_{01} & 0 \\ 0 & Z_{02} \end{bmatrix} \quad Y_0 = \begin{bmatrix} Y_{01} & 0 \\ 0 & Y_{02} \end{bmatrix} \quad Z_0 = Y_0^{-1} \dots\dots(3 \cdot 9)$$

これに関連して、規格化Z行列、規格化Y行列、規格化F行列が次のように定義される。

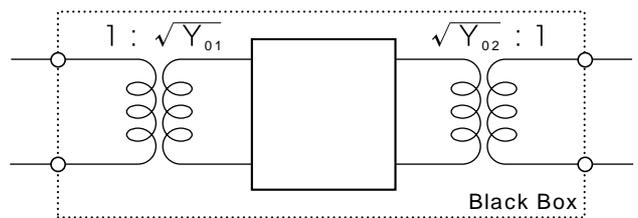
$$\hat{Z} = \begin{bmatrix} \hat{Z}_{11} & \hat{Z}_{12} \\ \hat{Z}_{21} & \hat{Z}_{22} \end{bmatrix} = Z_0^{-1/2} \cdot Z \cdot Z_0^{-1/2} = \begin{bmatrix} Z_{11}/Z_{01} & Z_{12}/\sqrt{Z_{01}Z_{02}} \\ Z_{21}/\sqrt{Z_{01}Z_{02}} & Z_{22}/Z_{02} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3 \cdot 10)$$

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_{11} & \hat{Y}_{12} \\ \hat{Y}_{21} & \hat{Y}_{22} \end{bmatrix} = Y_0^{-1/2} \cdot Y \cdot Y_0^{-1/2} = \begin{bmatrix} Y_{11}/Y_{01} & Y_{12}/\sqrt{Y_{01}Y_{02}} \\ Y_{21}/\sqrt{Y_{01}Y_{02}} & Y_{22}/Y_{02} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3 \cdot 11)$$

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{Y_{01}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_{01}} \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} \sqrt{Z_{02}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Y_{02}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \sqrt{Y_{01}Z_{02}} B \\ C & \sqrt{Z_{01}Y_{02}} D \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3 \cdot 12)$$

これらは、 \hat{V} 、 \hat{I} に関する回路行列である。それはポート1、2にそれぞれ1:Y₀₁^{-1/2}、1:Y₀₂^{-1/2}の理想トランスを接続し、入射波、反射波の特性インピーダンスを1Ωに規格化したことに相当する(図2)。

ブラックボックスの規格化 (図2)



これらの回路行列から、各種伝達関数あるいは伝送係数も計算できる。ここでは例として、Sパラメータに関する深い動作伝送係数について述べる。

動作伝送係数S_Bは、回路行列の要素を用いて次のように表わされる。

$$S_B = 1/S_{21} = \frac{|\hat{Z}| + \hat{Z}_{11} + \hat{Z}_{22} + 1}{2\hat{Z}_{21}} = \frac{|\hat{Y}| + \hat{Y}_{11} + \hat{Y}_{22} + 1}{-2\hat{Y}_{21}} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}}{2} \quad (3 \cdot 13)$$

また反射起電力を想定する反響伝送係数 S_E=1/S₁₁というものもある。

3-2. 2ポートの回路行列の相互関係

前節に挙げた回路行列は同じ物を違う形式で表現しただけなので、相互に変換可能なはずである。その変換式を表1に示す。

回路行列の相互変換 (表1)

	Z	Y	F	S	T
Z =	$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$	Y^{-1}	$\begin{bmatrix} A & F \\ C & 1 & D \end{bmatrix}$	$\hat{Z} = \begin{bmatrix} I+S \\ I-S \end{bmatrix}$	-
Y =	Z^{-1}	$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} D & - F \\ -1 & A & B \end{bmatrix}$	$\hat{Y} = \begin{bmatrix} I-S \\ I+S \end{bmatrix}$	-
F =	$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z \\ Z_{21} & 1 & Z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Y_{22} & 1 \\ -Y_{21} & Y & Y_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$		
S =	$\begin{bmatrix} \hat{Z}-I \\ \hat{Z}+I \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} I-\hat{Y} \\ I+\hat{Y} \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & T_{12} & T \\ T_{22} & 1 & -T_{21} \end{bmatrix}$
T =	-	-		$\begin{bmatrix} 1 & - S & S_{11} \\ S_{21} & -S_{22} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$

$$\hat{F} = \frac{1}{2S_{21}} \begin{bmatrix} 1+S_{11}-S_{22}-|S| & 1+S_{11}+S_{22}+|S| \\ 1-S_{11}-S_{22}+|S| & 1-S_{11}+S_{22}-|S| \end{bmatrix}$$

$$\hat{F} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} T_{11}+T_{12}+T_{21}+T_{22} & -T_{11}+T_{12}-T_{21}+T_{22} \\ -T_{11}-T_{12}+T_{21}+T_{22} & T_{11}-T_{12}-T_{21}+T_{22} \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{A+B+C+D} \begin{bmatrix} A+B-C-D & 2|F| \\ 2 & -A+B-C+D \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A-B-C+D & A+B-C-D \\ A-B+C-D & A+B+C+D \end{bmatrix}$$

ここで、Iは単位行列

また各回路行列の行列式は以下のような関係がある。

$$|Z| = |\hat{Z}||Z_0| = \frac{1}{|Y|} = \frac{1}{|\hat{Y}||Y_0|} = \frac{B}{C} \dots\dots\dots(3\cdot 14)$$

$$\frac{Z_{11}}{Z_{22}} = \frac{Y_{22}}{Y_{11}} \dots\dots\dots(3\cdot 15)$$

$$|F| = |\hat{F}| = \frac{Z_{12}}{Z_{21}} = \frac{Y_{12}}{Y_{21}} = \frac{S_{12}}{S_{21}} = |T| \dots\dots\dots(3\cdot 16)$$

$$|S| = -\frac{T_{11}}{T_{22}} \dots\dots\dots(3\cdot 17)$$

Z、Y、F間の変換式は、 \hat{Z} 、 \hat{Y} 、 \hat{F} にも当てはまる。Z、Y、S間の式はnポートに拡張してもそのまま使える。これらの変換式が、1ポートのときの入力インピーダンス、入力アドミタンス、反射係数の関係式と同じ形で書けるのを見ると、Z、Y、S行列はそれらを多ポートに拡張したものだということが自然に受け入れられる。

3-3. 回路行列の性質

部品の性質は回路行列に反映される。例えば部品に対称性があれば、回路行列はそれに見合った性質を有することになる。相反性(可逆性)、受動性、無損失性も同様に回路行列に一定の制限を与える。そういった部品の性質が回路行列でどのように表現されるかを表2にまとめた。

回路行列の性質 (表2)

	Z行列、Y行列	S行列
相反性	'Z = Z(対称行列)	'S = S(対称行列)
可逆性	F = 1	T = 1
受動性	R = 0	S*S I、abs S = 1
無損失性	R = 0 $\frac{\partial X}{\partial} = 0$	S*S = I(Unitary行列)、abs S = 1 S* $\frac{\partial S}{\partial j}$ = 0

この表のZ、Y、Sに関する式はnポート行列に拡張してもそのまま成り立つ。少し解説を加える。

相反性があれば、2ポート行列の場合、4要素のうち3つだけが独立成分ということになる。S行列で具体的に書けば、 $S_{12}=S_{21}$ である。相反回路ではR、Xは実対称行列になる。受動性 $S^*S = I$ を2ポートの場合について具体的に書いてみると、非負定値Hermite行列はその首座小行列式が全て非負であることから、 $|S_{11}|^2+|S_{21}|^2 = 1$ となっていることがわかる。これより各Sパラメータの絶対値は1を超えないこと ($|S_{ij}| \leq 1$)が導かれる。そうでなければ増幅作用があることになってしまう。

無損失性 $\frac{\partial X}{\partial} = 0$ はリアクタンス定理に相当する。無損失相反回路ではZは純虚数行列(Xが実Hermite行列)となる。無損失性 $S^*S = I$ はSがUnitary行列だということである。Unitary行列はベクトルの大きさを変えない写像に対応しているため、信号は反射するか透過するかどちらかになり、内部で吸収し熱になるものが無い(エネルギーが保存される)ことを意味する。

ここで、 $R=(Z+Z^*)/2$ 、 $X=(Z-Z^*)/2j$ とおいた。つまりZをHermite行列 Rとskew-Hermite行列 jX(XはHermite行列)に分解し、 $Z=R+jX$ と書いたことになる。ただし、jは虚数単位、Iは単位行列である。'は転置行列、*は複素共役転置行列(スカラーのときはただの複素共役となる)を示す記号である。行列に対する不等号はHermite形式での大小を表わす。abs |S|は「行列式の絶対値」の意味である。

3-4. S行列の基準面の移動

一般に、nポートのS行列があったとき、各ポートの基準面を、 n_i (部品から遠ざかる方を正とする)だけ移動すると新しいS行列S'は、

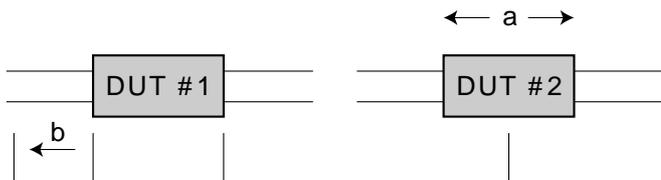
$$S' = PSP \dots\dots\dots(3\cdot 18)$$

と書ける。ただし、 k_i を位相定数として、 P は次のような対角行列である。

$$P = \begin{bmatrix} e^{-jk_1 r_1} & & & \\ & e^{-jk_2 r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-jk_n r_n} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3 \cdot 19)$$

例として、両端に基準面のある2ポート部品(長さ a)のS行列を、(#1)ポート1の基準面を b だけ遠ざける、(#2)部品の中央に基準面を移動するとどうなるかを計算する(図3)。

基準面を移動する例題 (図3)



ただし簡単のため、全てのポートの特性インピーダンスと位相定数は同一で、それぞれ Z_0 、 k だとする。

基準面の移動後のS行列は、

#1の場合、

$$P_{\#1} = \begin{bmatrix} e^{-jkb} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ だから } S'_{\#1} = \begin{bmatrix} e^{-2jkb} S_{11} & e^{-jkb} S_{12} \\ e^{-jkb} S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \dots\dots(3 \cdot 20)$$

#2の場合、

$$P_{\#2} = \begin{bmatrix} e^{jka/2} & 0 \\ 0 & e^{jka/2} \end{bmatrix} \text{ だから } S'_{\#2} = e^{jka} S \dots\dots\dots(3 \cdot 21)$$

となる。これらの結果は、S行列の各要素の意味を考えると自明である。例えば、#1の S_{11} は $2b$ だけ経路が長くなるので、 e^{-2kb} という因子がかかる。

同じことをT行列で用いて計算してみる。基準面の移動は特性インピーダンスが一致する無損失伝送線の追加あるいは削除として扱える。元のS行列を変換して、

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3 \cdot 22)$$

になったとする。長さ x の伝送路のT行列 T_x (x は引数として扱う)は、(4・5)式(次号vol.32で紹介する)より

$$T_x = \begin{bmatrix} e^{-jkx} & 0 \\ 0 & e^{jkx} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3 \cdot 23)$$

なので、

$$T_{\#1} = T_b \cdot T = \begin{bmatrix} e^{-jkb} T_{11} & e^{-jkb} T_{12} \\ e^{jkb} T_{21} & e^{jkb} T_{22} \end{bmatrix} \quad T_{\#2} = T_{-a/2} \cdot T \cdot T_{-a/2} = \begin{bmatrix} e^{jka} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & e^{-jka} T_{22} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3 \cdot 24)$$

となる。これらをS行列に戻すと、上記の結果(3・20)、(3・21)式と一致する。

3-5. 電子部品の電力損失の評価方法

以上、3章で述べてきたことの応用例として、電力損失の評価方法について考えてみる。一般にフェライトビーズ(以下ビーズ)は抵抗性なので、ノイズを熱にして吸収するといわれる。このことを定量的に表現するにはどうしたらよいのだろうか。

(1) インピーダンスによる評価

一番単純なのは、インピーダンスを見ることである。 $Z = R + jX$ の素子に電流 I を流したとき、 $P = R|I|^2$ の電力が消費される。従って、 $R = 0$ であれば電力の損失はないし、また逆に R が大きいと電気エネルギーが熱になってしまう。 $|Z|$ に対する R の割合が電力損失の度合いを示している。複素電力を $P_c = Z|I|^2$ と定義したとき、 $P_c = P - jP_r$ (P_r は無効電力)と書けるので、これは皮相電力 $|P_c|$ に対する実効電力 P の割合に相当する。同じことは、 $Q = 1/\tan \theta$ でも評価できる。 Q が小さい($\tan \theta$ が大きい)ほど電力損失が大きい。

(2) Sパラメータによる評価

3-3節で示したように、受動部品のS行列は、 $|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1$ という制限がある。このことは部品に損失があると、反射分 S_{11} と伝送分 S_{21} を合わせても1より小さくなってしまふことを意味する。その分電気エネルギーが無くなってしまった(熱になった)ことになる。この $U = |S_{11}|^2 + |S_{21}|^2$ という量を使うと電力損失の度合いを見積もることができる。すなわち、 U は0 \leq U \leq 1で、大きい(1に近い)ほど電力の損失が少ないことになる。

ビーズを一種のフィルタとして捉えると、その減衰域(通過域)では S_{21} (S_{11})が小さいので、 U は $U \approx |S_{11}|^2$ ($U \approx |S_{21}|^2$)と近似される。そのような場合は、 $|S_{11}|$ ($|S_{21}|$)を見るだけで電力損失の度合いを判定できる。

インピーダンスで表現できない3端子フィルタなどもこの方法であれば評価可能である。また一般の n ポート部品にもこの考え方を拡張できる。

簡単な例を計算してみる。インピーダンス Z の2端子部品をseries-thru配置した場合のS行列は次のように表わされる(次号vol.32、4章の表5参照)。

$$\frac{1}{Z/Z_0 + 2} \begin{bmatrix} Z/Z_0 & 2 \\ 2 & Z/Z_0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3 \cdot 25)$$

この場合Uは、

$$U = 1 - \frac{4R}{(R+2)^2 + X^2} \dots\dots\dots(3.26)$$

と計算される。ただし、 $Z/Z_0 = R + jX$ とおいた。

従って、抵抗分が少なく $R \ll X$ の場合、 $U \approx 1$ となり、ほとんど電力は消費されないが、その逆で、 $R \gg X$ の場合は、

$$U = 1 - \frac{4R}{(R+2)^2} \dots\dots\dots(3.27)$$

のように吸収される。この場合も、 R が極端に大きい小さいと、ほとんど反射または透過するので電力損失は少ない。一番電力を吸収するのは、 $R=2$ のときで、 $U=1/2$ となる(だから上で0 $U \approx 1$ と書いたが、2端子部品をseries-thru配置した場合、より厳密には $1/2 \approx U \approx 1$ となることわかる)。

例として、 Z が純抵抗 R の場合と純リアクタンス jX の場合を具体的な数値で見してみる。 $R=X=Z_0=50\Omega$ (すなわち $R=X=1$)とする。結果を表3に示す。

純抵抗と純リアクタンスの場合の電力損失比較(表3)

	S	U	コメント
純抵抗の場合	$S_{11}=1/3$ $S_{21}=2/3$	$U=5/9$	抵抗性だからといって反射が無いわけではない。マッチングが取れていないと反射はある。
純リアクタンスの場合	$S_{11}=j/(2+j)$ $S_{21}=2/(2+j)$	$U=1$	$ S_{11} =1/\sqrt{5}$ 、 $ S_{21} =2/\sqrt{5}$

$|S_{11}|$ は、dB表示だとそれぞれ -10dBと -7dB($1/3$ 、 $1/\sqrt{5}$ に相当)なので、あまり変わらない感じもするが、 U を計算すると、同じ 50Ω でも純抵抗の場合 $5/9$ と半減しているのに対し、純リアクタンスは損失無し($U=1$)となる。

実際のピーズとコイルで比較したものを図4に示す。

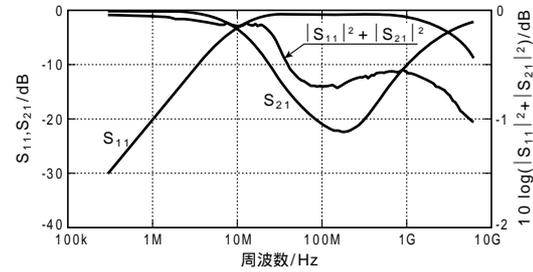
インピーダンス特性を見ると、ピーズの方はインピーダンスの実数部 R がブロードになっていて広い周波数範囲で抵抗性であることがわかる。

またそれに対応するように、クロスポイント($Q=1$ となる周波数、この場合70MHz)以上では、 $U = |S_{11}|^2 + |S_{21}|^2$ が小さくなっている(コイルが -0.2dB程度なのに対し、ピーズは -0.6dBぐらいある)。同じことは減衰域の $|S_{11}|$ でもわかる。コイルが -0.1dBぐらいなのに対して、ピーズは -0.7dBある。

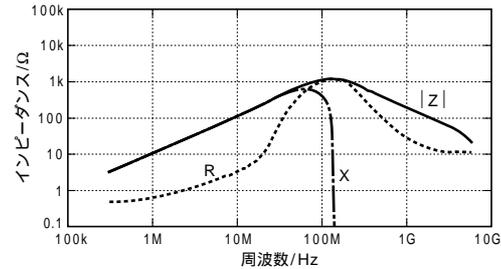
今回は「S行列の例」について述べる。

ピーズとコイルの比較例(図4)

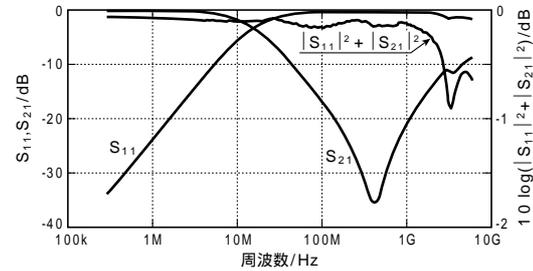
(a) ピーズのSパラメータ



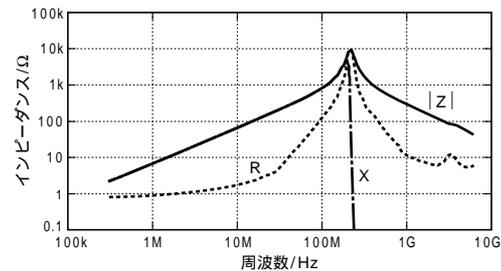
(b) ピーズのインピーダンス



(c) コイルのSパラメータ



(d) コイルのインピーダンス



(1) 参考書

- 1) 佐藤利三郎、「伝送回路」、コロナ社、1963
- 2) 武部幹、篠崎寿夫、「伝送回路網入門」、東海大学出版会、1965
- 3) 池田哲夫、「回路網理論」、丸善、1980
- 4) 高橋秀俊、「線型集中定数系論」、岩波書店、1969
- 5) 尾崎弘、黒田一之、「回路網理論」、共立全書、1959
- 6) 黒川兼行、「マイクロ波回路入門」、丸善、1963
- 7) 小口文一、「マイクロ波およびミリ波回路」、丸善、1964
- 8) 小西良弘、「電磁波回路」、オーム社、1976、「マイクロ波回路の基礎とその応用」、総合電子出版、1992、「マイクロ波回路の構成法」、総合電子出版、1993
- 9) 岡田文明、「マイクロ波工学」、学献社、1993
- 10) 太田勲、「電磁波回路のSパラメータによる表現とその基本特性」、MWE'97 Digest, 1997
- 11) 荒木純道、「Sパラメータに基づく電磁波回路の解析と設計」、MWE'97 Digest, 1997

(2) 基準インピーダンスが正の実数でない、以下に書く式はもっと複雑になる。そのような条件まで拡張したS行列は一般化S行列と呼ばれる。
K.Kurokawa, "Power waves and the scattering matrix", IEEE trans. Microwave Theory Tech., pp.194-202, vol.MTT-13, March 1965



S行列の例

電子部品事業本部
藤城 義和

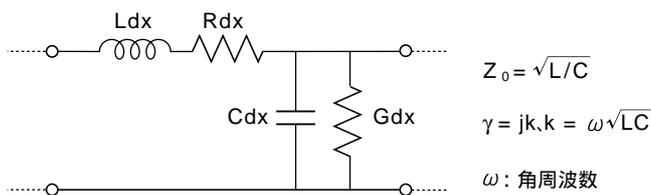
今回はSパラメータの定義と性質について述べた。今回はそれらの理解を深めるという意味も込めて、3つの簡単な例を考察する。ここで扱う例題は次のステップへの準備にもなっている。後半では2端子部品に関して、部品のもつインピーダンスとSパラメータの関係を少し詳しく説明する。またそれに関連して、TDK S-parameter Data Libraryの簡単な応用例を紹介する。

4. S行列の例

4-1. 伝送線のS行列

分布RLGCで表現される長さxの伝送線路(図5)を考える。ここでは話を簡単にするため、無損失(R=G=0)であるとす

分布RLGC線路(図5)



その特性は電信方程式を解くことによって与えられ、定常状態のときの始端の電流 I_1 、電圧 V_1 と終端の電流 I_2 、電圧 V_2 の関係をF行列の形で表わすと、

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = F_X \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma x & Z_0 \sinh \gamma x \\ Y_0 \sinh \gamma x & \cosh \gamma x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \dots (4 \cdot 1)$$

のようになる⁽³⁾。ただし、 $Z_0 = 1/Y_0$ は特性インピーダンス($Z_0 > 0$)、 $\gamma = jk$ は伝播定数である($k > 0$ と、とる)。このF行列を表1(前号vol.3.1参照)の変換式に基づき、Z、Y行列に直すと、

$$Z_X = Z_0 \begin{bmatrix} \coth \gamma x & 1/\sinh \gamma x \\ 1/\sinh \gamma x & \coth \gamma x \end{bmatrix} \dots (4 \cdot 2)$$

$$Y_X = Y_0 \begin{bmatrix} \coth \gamma x & -1/\sinh \gamma x \\ -1/\sinh \gamma x & \coth \gamma x \end{bmatrix} \dots (4 \cdot 3)$$

となる。またS、T行列は、基準インピーダンスをその伝送線路の特性インピーダンスにとると、

$$S_X = e^{-\gamma x} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dots (4 \cdot 4)$$

$$T_X = \begin{bmatrix} e^{-\gamma x} & 0 \\ 0 & e^{\gamma x} \end{bmatrix} \dots (4 \cdot 5)$$

と変換される。

S行列は基準インピーダンス値を特性インピーダンスとする仮想半無限長線路(半無限長線路は抵抗と同等だから、各ポートを基準インピーダンス値の抵抗で終端したととらえてもよい)で励振したときの応答である。この場合、基準インピーダンスとして対象となる伝送線路の特性インピーダンスを用いたので、S行列の各要素は線路を整合終端したときの値を示していることになる。従って反射がないので S_{11} や S_{22} は0となり、また S_{21} や S_{12} は、長さ分の遅延 e^{-jkx} だけを持つ。

これらの回路行列の性質を調べる。相反性は、 $|F_X| = |T_X| = 1$ あるいは Z_X 、 Y_X 、 S_X が対称行列であることから確認できる。また無損失なので Z_X 、 Y_X は純虚数行列、 S_X はUnitary行列となる。次に対称性について考える。伝送線路は左右対称なので、ポート1とポート2を置換しても特性は変わらないはずである。ポートの置換を行列で表現すると、

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dots (4 \cdot 6)$$

と書くことができる。対称であればS行列(S行列では各ポートの基準インピーダンスが等しい場合に限る)やZ、Y行列はこのDと可換になるので、次のような関係が成り立つ。

$$S_{11} = S_{22}, S_{12} = S_{21} \dots (4 \cdot 7)$$

$$Z_{11} = Z_{22}, Z_{12} = Z_{21} \dots (4 \cdot 8)$$

$$Y_{11} = Y_{22}, Y_{12} = Y_{21} \dots (4 \cdot 9)$$

従って、F、T行列では、

$$A = D \dots (4 \cdot 10)$$

$$T_{12} = -T_{21} \dots (4 \cdot 11)$$

となる。(4・1)~(4・5)式はこれらの関係を満足している。

次にこれらの回路行列を長さの関数としてとらえてみる。例えば長さが2倍になった場合は、 Z_{2x} 、 Y_{2x} 、 F_{2x} 、 S_{2x} 、 T_{2x} になるはずである（suffixが2xになっているのは、(4・1)～(4・5)式でxの所に2xを代入するという意味）、これは長さxの伝送線路を2個連続接続したのと同じだから、F行列やT行列では、 Fx^2 、 Tx^2 としても表わされるはずである。実際そうになっているのは容易に確かめられる。また同様に、 $F_x^{-1}=F_{-x}$ 、 $T_x^{-1}=T_{-x}$ も成り立つ。この性質は3-4節(前号Vol.31)で用いた。

もし、基準インピーダンスをその伝送線路の特性インピーダンスとは異なる値(Z_{01} 、 Z_{02})にしたならば、S行列はどうなるのであろうか。変換式を地道に計算すれば結果は得られる。式が複雑なので、ここでは長さがゼロ($x=0$)の場合だけを示す。

$$S_{step} = \frac{1}{\sqrt{Y_{01}Z_{02} + \sqrt{Z_{01}Y_{02}}}} \begin{bmatrix} \sqrt{Y_{01}Z_{02} - \sqrt{Z_{01}Y_{02}}} & 2 \\ 2 & \sqrt{Z_{01}Y_{02} - \sqrt{Y_{01}Z_{02}}} \end{bmatrix} \dots\dots(4 \cdot 12)$$

これは、特性インピーダンスの不連続な部分の反射、透過を表わしていることになる。この場合、 S_{11} や S_{22} はもはや0ではない。特性インピーダンスの違う線路を接続したために反射が起きたのである。

この特別な場合として基準インピーダンスが、ポート1では整合($Z_{01}=Z_0$)をしていて、ポート2が short: $Z_{02}=0$ 、open: $Z_{02}=\infty$ 、match: $Z_{02}=Z_0=Z_{01}$ となっている場合を考える。結果を表4に示す。

ポート2が特別な場合の伝送線路のS行列(表4)

	長さx	長さ0
short $Z_{02}=0$	$S_x = \begin{bmatrix} -e^{-2j\kappa x} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$S_{step} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
open $Z_{02}=\infty$	$S_x = \begin{bmatrix} e^{-2j\kappa x} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$S_{step} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
match $Z_{02}=Z_0$	$S_x = e^{-j\kappa x} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$S_{step} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $F_{step} = T_{step} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ポート2がopenまたはshortのときはそこですべてが反射される。一方、整合している場合は反射が起こらない。特に長さがゼロの場合は何も無いのと同じになる。

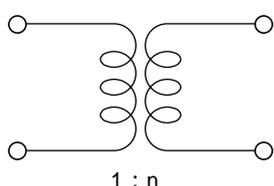
基準インピーダンスに関する、より一般的な議論は5章(次号Vol.33)で扱う。

4-2. 理想トランスのS行列

(1) 2ポート理想トランス

巻き線比nの理想トランス(図6)は電圧をn倍し、電流を1/nにする作用がある。これをF行列で表わすと、

理想トランス(図6)



$$F_{1:n} = \begin{bmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \dots\dots(4 \cdot 13)$$

と書くことができる。Z、Y行列は存在しない。S、T行列は表1の変換式を使うと、

$$S_{1:n} = \frac{1}{Z_{02} + n^2 Z_{01}} \begin{bmatrix} Z_{02} - n^2 Z_{01} & 2n\sqrt{Z_{01}Z_{02}} \\ 2n\sqrt{Z_{01}Z_{02}} & n^2 Z_{01} - Z_{02} \end{bmatrix} \dots\dots(4 \cdot 14)$$

$$T_{1:n} = \frac{1}{2n\sqrt{Z_{01}Z_{02}}} \begin{bmatrix} Z_{02} + n^2 Z_{01} & Z_{02} - n^2 Z_{01} \\ Z_{02} - n^2 Z_{01} & Z_{02} + n^2 Z_{01} \end{bmatrix} \dots\dots(4 \cdot 15)$$

と求まる。このようにZ行列などが定まらない場合でも、S行列は常に存在する。

これらの回路行列の性質を調べる。 $S_{1:n}$ が対称行列であること、そして $|F_{1:n}| = |T_{1:n}| = 1$ となることは理想トランスが相反であることを示している。また理想トランスは無損失なので、 $S_{1:n}$ は直交行列になる($|S_{1:n}| = -1$)。n=±1の場合を除けば左右の対称性はない。

各ポートの基準インピーダンスが等しい($Z_{01}=Z_{02}$)場合、(4・14)(4・15)式は次のように簡単になる。

$$S_{1:n} = \frac{1}{1+n^2} \begin{bmatrix} 1-n^2 & 2n \\ 2n & n^2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & \pm\sqrt{1-\rho^2} \\ \pm\sqrt{1-\rho^2} & -\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_\rho & \sin\theta_\rho \\ \sin\theta_\rho & -\cos\theta_\rho \end{bmatrix} \dots\dots(4 \cdot 16)$$

$$T_{1:n} = \frac{1}{2n} \begin{bmatrix} 1+n^2 & 1-n^2 \\ 1-n^2 & 1+n^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\rho^2}} \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin\theta_\rho} \begin{bmatrix} 1 & \cos\theta_\rho \\ \cos\theta_\rho & 1 \end{bmatrix} \dots\dots(4 \cdot 17)$$

ただし、 $\rho = \cos\theta_\rho = (1-n^2)/(1+n^2)$ とおいた。複合は同順で、nの正負に対応する。この場合、S、T行列は基準インピーダンスに依存しなくなることに注意。

ここで特殊なnの値の場合について考える。n=±1とすると、

$$S_{1:\pm 1} = \pm \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots(4 \cdot 18)$$

$$T_{1:\pm 1} = F_{1:\pm 1} = \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots(4 \cdot 19)$$

となり、ポート1の状態がポート2へそのまま、あるいは反転して伝送される。ちなみに(4・14)式でn=1とすると(4・12)式が再び導かれる。n=0、±∞の場合は、F、T行列は不定となるが、S行列は形式的に、

$$S_{1:0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad S_{1:\infty} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots(4 \cdot 20)$$

と求まる。このような状態もここでは許容する。

ポート2を $Z_2=1/Y_2$ で終端したときの入力インピーダンスを求めてみる[6章(次号Vol.33)も参照]、入力インピーダン

スは、F行列の要素を用いて、一般に

$$Z_{IN} = \frac{AZ_2 + B}{CZ_2 + D} \dots\dots\dots(4 \cdot 21)$$

と表わされるので、この場合、

$$Z_{IN} = Z_2 / n^2 \dots\dots\dots(4 \cdot 22)$$

となる。すなわち理想トランスはインピーダンスを定数倍(1/n²)する機能がある。これは、(4・14)式で

$$n = \sqrt{Z_{02} / Z_{01}} \dots\dots\dots(4 \cdot 23)$$

とすると(4・18)式が得られることから理解される。

無損失相反回路は、理想トランスと無損失伝送線路の組み合わせで実現できる。以下ではそれを説明する。2次のUnitary行列は、一般に次の形で表わされる⁽⁴⁾。

$$U = \begin{bmatrix} e^{j(\xi+\eta)} \cos \theta & \mp e^{j(\xi+\zeta)} \sin \theta \\ e^{j(\xi-\zeta)} \sin \theta & \pm e^{j(\xi-\eta)} \cos \theta \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4 \cdot 24)$$

相反性を仮定すると、これは

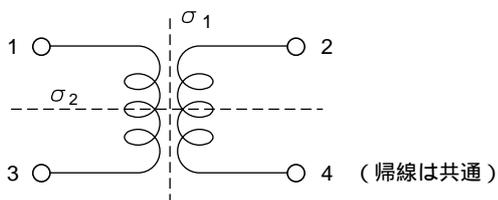
$$U = \begin{bmatrix} e^{j(\xi+\eta)} \cos \theta & e^{j\xi} \sin \theta \\ e^{j\xi} \sin \theta & -e^{j(\xi-\eta)} \cos \theta \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4 \cdot 25)$$

という形に限定される。このUnitary行列は、理想トランスのS行列(4・16)式に基準面の移動を施したこと[(ξ+η)/2、(ξ-η)/2だけ位相を回転させる]に相当する。基準面の移動を表わす行列P[(3・19)式]はUnitaryかつ対称行列だから、基準面の移動で無損失性、相反性は変化しない。

(2) 4ポート理想トランス

次に理想トランスを4ポート部品(図7)ととらえた場合のS行列を考える。簡単のため、巻き線比は1:1とする。

理想トランスを4ポート部品ととらえる(図7)



そのS行列は、

$$S_{1:1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4 \cdot 26)$$

と表わされる[7章(Vol.34掲載)参照]。相反性(対称行列)無損失性(直交行列、|S_{1:1}| = -1)はここでも成り立つ。

対称性について考える。この場合は、₁と₂の2つの対称面

が存在するが、それらの対象操作はそれぞれ、

$$D_{1} = \begin{bmatrix} & 0 \\ 0 & \end{bmatrix} \quad D_{2} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4 \cdot 27)$$

という行列で表現される。ただし、

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4 \cdot 28)$$

とおいた。対称性があれば、S行列はこのD₁、D₂と交換可能でなければならない。ここで簡単化のため、S行列を区分けし、

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4 \cdot 29)$$

という記号を導入する。太字のS₁₁、S₂₁、S₁₂、S₂₂は、区分けされた2次行列を表わす。この記号を用いると、₁、₂の対称性は、

$$1: \quad S_{11} = S_{11} \quad S_{21} = S_{21} \\ S_{12} = S_{12} \quad S_{22} = S_{22} \dots\dots\dots(4 \cdot 30)$$

$$2: \quad S_{11} = S_{22} \quad S_{21} = S_{12} \dots\dots\dots(4 \cdot 31)$$

という条件になる。具体的に書けば、

$$1: \quad S_{11} = S_{22} \quad S_{31} = S_{42} \quad S_{13} = S_{24} \quad S_{21} = S_{12} \\ S_{33} = S_{44} \quad S_{41} = S_{32} \quad S_{14} = S_{23} \quad S_{43} = S_{34} \dots\dots\dots(4 \cdot 32)$$

$$2: \quad S_{11} = S_{33} \quad S_{21} = S_{43} \quad S_{12} = S_{34} \quad S_{31} = S_{13} \\ S_{22} = S_{44} \quad S_{41} = S_{23} \quad S_{14} = S_{32} \quad S_{42} = S_{24} \dots\dots\dots(4 \cdot 33)$$

である。(4・26)式はこの関係も満たしている。

この4ポートの理想トランスで、ポート3、4を接地した状態のものを想定する。それは、理想トランスを2ポート部品としてとらえたことに相当する。以下ではそのことがS行列でどのように表現されるかを計算してみる。

最初に一般の4ポート部品、

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4 \cdot 34)$$

のポート3、4を接地するとどうなるかを求める。S行列を(4・34)式のように区分けし、

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{13} & S_{14} \\ S_{23} & S_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4 \cdot 35)$$

$$\begin{bmatrix} b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{31} & S_{32} \\ S_{41} & S_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{33} & S_{34} \\ S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4 \cdot 36)$$

という2つの方程式に分解する。見通しを良くするため、これを

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \dots\dots\dots(4 \cdot 37)$$

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \dots\dots\dots(4 \cdot 38)$$

と書く。ただし、

$$b_1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad a_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(4 \cdot 39)$$

とおいた。ポート3、4の終端条件は、この記号を用いると、

$$b_2 = -a_2 \dots\dots\dots(4 \cdot 40)$$

と表わされる。この終端条件を加味して(4・38)式を a_2 について解けば、

$$a_2 = -(S_{22} + I)^{-1} S_{21} a_1 \dots\dots\dots(4 \cdot 41)$$

となる。これを(4・37)式に代入すると、

$$S_{port3,4=short} = S_{11} - S_{12}(S_{22} + I)^{-1} S_{21} \dots\dots\dots(4 \cdot 42)$$

あるいは、具体的に書いて、

$$S_{port3,4=short} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{13} & S_{14} \\ S_{23} & S_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{33} + 1 & S_{34} \\ S_{43} & S_{44} + 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{31} & S_{32} \\ S_{41} & S_{42} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4 \cdot 43)$$

と所望の2ポート行列が得られる(注： $S_{22} + I$ の逆行列が存在しないときは、この式は使えない)。この結果を(4・26)式の理想トランスに適用すると、

$$S_{1:1, port3,4=short} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4 \cdot 44)$$

となり、(4・18)式に一致する。

(3) ハイブリッドトランス

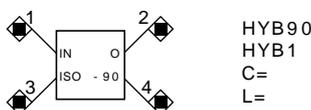
各ポートで整合のとれたマジックTのS行列は、適当な基準面を選ぶと、

$$S_{magic-T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4 \cdot 45)$$

と表わされる⁽⁵⁾。このS行列も相反性(対称行列)、無損失性(直交行列、 $|S_{magic-T}|=1$)を有している。

この整合マジックTを回路シュミレータ(ここではHP社のTouchstone/SeriesIVを取りあげる)上で実現するにはどうしたらよいのだろうか。TouchstoneにはマジックTそのものは用意されていないので、無損失方向性結合器を使って合成する。Touchstoneの方向性結合器HYB90(図8)は、次のような特性を持っている。

HYB90(図8)



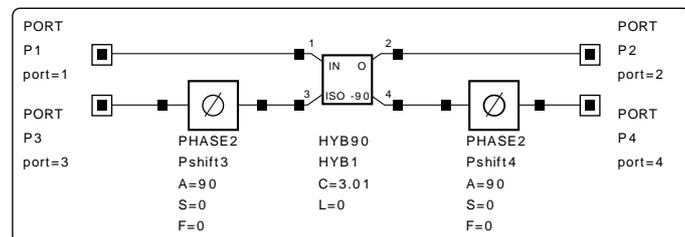
$$S_{HYB90} = \begin{bmatrix} \alpha & -j\beta \\ -j\beta & \alpha \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4 \cdot 46)$$

ただし、 $\alpha = 10^{-C/20}$ 、 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ である。結合度CをC=3dBにしたものは、特にhybrid couplerと呼ばれ、

$$S_{hybrid_coupler} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} & -j \\ -j & \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4 \cdot 47)$$

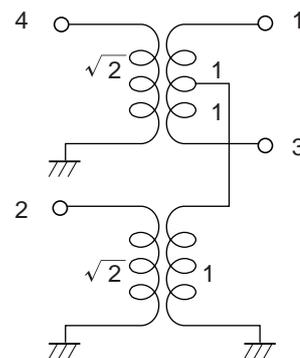
となる。これは(4・45)式に似ているが若干違う。しかし基準面を適当に移動することにより一致させることができる。この場合、ポート3、4の基準面を $1/2$ だけ内側にすればよい。基準面の移動は、シュミレータ上ではPHASE2素子で表わされる。それらを組み合わせて、整合マジックTは図9のように描ける。

マジックTの実現(図9)



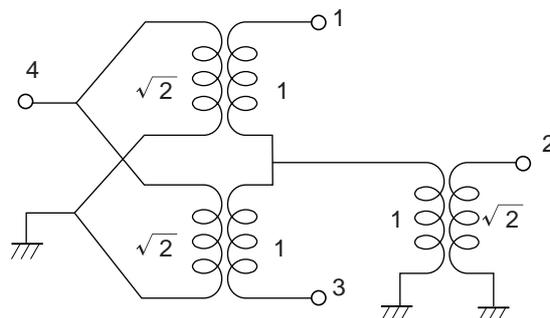
またマジックTは、図10のようなハイブリッドトランスと等価であるから、このことを利用しても実現できる。理想トランスを用いて素直に描けば、図11(a)のようになる。あるいはそれを变形して図11(b)(P.29)のようにしてもよい。

ハイブリッドトランス(図10)

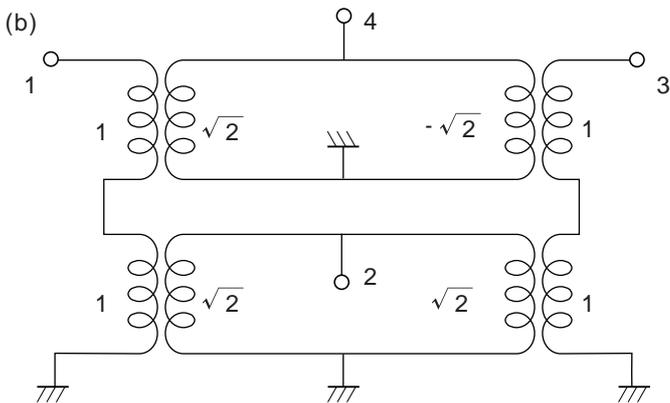


ハイブリッドトランスの実現(図11)

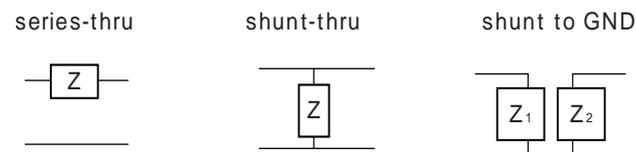
(a)



ハイブリッドトランスの実現 (図11)



2端子インピーダンスで2ポートを構成する (図12)



2端子インピーダンスの回路行列 (表5)

構成	Z	Y	F	S	T
series-thru 	無	$Y \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\hat{Z}+2} \begin{bmatrix} \hat{Z} & 2 \\ 2 & \hat{Z} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2-\hat{Z} & \hat{Z} \\ -\hat{Z} & 2+\hat{Z} \end{bmatrix}$
shunt-thru 	$Z \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	無	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2\hat{Z}+1} \begin{bmatrix} -1 & 2\hat{Z} \\ 2\hat{Z} & -1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2\hat{Z}} \begin{bmatrix} 2\hat{Z}-1 & -1 \\ 1 & 2\hat{Z}+1 \end{bmatrix}$
shunt to GND 	$\begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{bmatrix}$	無	$\begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix}$	無

4-3. 2端子インピーダンスのS行列

コイルやコンデンサなどの2端子受動部品のS行列を考察する。2端子インピーダンス $Z=1/Y$ を持つ部品を使って、2ポートを構成する接続方法は図12の3種類が考えられる。

これらの場合のZ、Y、F、S、T行列は、簡単な計算により表5のように求まる⁽⁶⁾。

ただし、各ポートの基準インピーダンスは全て同一で、 Z_0 とする。また $\hat{Z} = Z/Z_0$ 、 $\Gamma_i = \alpha(Z_i) = (\hat{Z}_i - 1)/(\hat{Z}_i + 1)$ と略記している。ここで $\alpha(x)$ は $\alpha(x) = (x - Z_0)/(x + Z_0)$ という関数と定義した。

これらの諸行列は次のような性質を持っている。

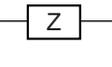
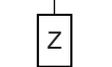
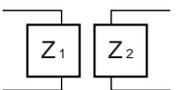
- 相反性 Z、Y、Sが対称行列、 $|F|=|T|=1$
- 受動性 Z、Yの受動性は自明である。S行列の行列式は、 $|S_{series-thru}|=G(Z/2)$ 、 $|S_{shunt-thru}|=-G(2Z)$ 、 $|S_{shunt to GND}|=G(Z_1)G(Z_2)$ となる。G(x)の形から、明らかに $abs|S|=1$ が成り立つ。
- 対称性 series-thru、shunt-thruに対しては、常に $Z_{11}=Z_{22}$ 、 $Y_{11}=Y_{22}$ 、 $S_{11}=S_{22}$ 、 $A=D$ 、 $T_{12}=-T_{21}$ が成り立つ。Shunt to GNDでは、 $Z_1=Z_2$ の場合は対称となる。

- 配置 部品の配置から次の関係が成り立つ。
series-thruでは、 $Y_{11}=-Y_{21}$ 、 $|Y|=0$ 、 $S_{11}+S_{21}=1$ 、 $T_{11}-T_{21}=1$ 。
shunt-thruでは、 $Z_{11}=Z_{21}$ 、 $|Z|=0$ 、 $S_{21}-S_{11}=1$ 、 $T_{11}+T_{21}=1$ 。
shunt to GNDでは、 $Z_{21}=Y_{21}=S_{21}=0$ 。

S行列の各要素は $|\hat{Z}|$ に対しては次のような傾向がある。series-thruの場合、 $|\hat{Z}|$ が大きくなると $|S_{11}|$ は大きく、 $|S_{21}|$ は小さく(減衰が大きくなる)。shunt-thruの場合はその逆の傾向になる。従って、基準インピーダンスが同一であれば、series-thruにインピーダンス $|Z|$ の大きなものを挿入したり、shunt-thruでインピーダンス $|Z|$ の小さいものを使うと、信号は伝送されにくくなる。これは直感的にも理解できる。また基準インピーダンス Z_0 に対する傾向はそれらの反対である。すなわちseries-thruの場合、 Z_0 が大きくなると、 $|S_{11}|$ は小さく、 $|S_{21}|$ は大きくなる(shunt-thruではその逆)。 Z_0 依存性の具体例は5-2節(次号Vol.33)を参照のこと。shunt to GNDの場合は、ポート1、2が分離されているので、各ポートは1ポートのときと同じ振る舞いになる。

次にopenやshortのように、 $|Z|$ が極端に大きい場合と小さい場合を考える。そのときのS行列の近似式を表6に示す。

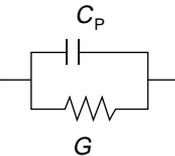
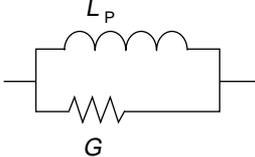
2端子インピーダンスのS行列の近似式 (表6)

構成	$ Z \ Z_0$	$ Z \ Z_0$
series-thru 	$\begin{bmatrix} \hat{Z}/2 & 1 \\ 1 & \hat{Z}/2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2/\hat{Z} \\ 2/\hat{Z} & 1 \end{bmatrix}$
shunt-thru 	$\begin{bmatrix} -1 & 2\hat{Z} \\ 2\hat{Z} & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1/2\hat{Z} & 1 \\ 1 & -1/2\hat{Z} \end{bmatrix}$
shunt to GND 	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

この表6からわかるように、 $|Z| \ Z_0$ のとき、series-thruの S_{11} やshunt-thruの S_{21} は Z に比例し、 $|Z| \ Z_0$ のとき、series-thruの S_{21} やshunt-thruの S_{11} は Z に反比例する。従って、このような近似が成り立つような周波数帯では、2端子部品の $|S_{11}|$ あるいは $|S_{21}|$ -周波数特性の形は $|Z|$ -周波数特性の形とよく似てくる [その例として図4 (前号vol.31) を参照。 $|S_{21}|$ は $|Z|$ の上下を逆にしたような形をしている]、そして基準インピーダンスを50Ωとすると次のように概算できる。

インピーダンスを表現する諸量 (表7)

(インピーダンス $Z=R+jX=|Z| \ \angle \theta$ 、アドミッタンス $Y=G+jB=|Y| \ \angle -\theta$ とL、C、Q、tan の関係)

領域	等価回路	$D=\tan\delta=1/Q$	相互関係
Capacitive $X \leq 0, B \geq 0$ $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$	 $X = -\frac{1}{\omega C_s}$	$D = -\frac{R}{X} = \frac{G}{B}$ $D = \omega C_s R = G/\omega C_p$ $D = -\cot \delta$ $\delta = \pi/2 + \theta$	$RG = \frac{1}{1+D^2}$ $XB = -\frac{1}{1+D^2}$ $C_s = C_p(1+D^2)$ $L_p = L_s(1+D^2)$
	 $B = \omega C_p$		
Inductive $X \geq 0, B \leq 0$ $0 \leq \theta \leq \pi/2$	 $X = \omega L_s$	$D = \frac{R}{X} = -\frac{G}{B}$ $D = R/\omega L_s = \omega L_p G$ $D = \cot \delta$ $\delta = \pi/2 - \theta$	$D \ll 1$ のときの近似 $RG \approx D^2$ $XB \approx -1$ $C_s \approx C_p$ $L_p \approx L_s$ $ Z \approx X = \omega L_s \approx \omega L_p$ $ Y \approx B = \omega C_p \approx \omega C_s$
	 $B = -\frac{1}{\omega L_p}$		

• series-thruの場合

$|Z| \ Z_0 \dots 20 \log |S_{11}| = 20 \log |Z| - 40 \dots \dots \dots (4 \cdot 48)$

$|Z| \ Z_0 \dots 20 \log |S_{21}| = 40 - 20 \log |Z| \dots \dots \dots (4 \cdot 49)$

• shunt-thruの場合

$|Z| \ Z_0 \dots 20 \log |S_{21}| = 20 \log |Z| - 28 \dots \dots \dots (4 \cdot 50)$

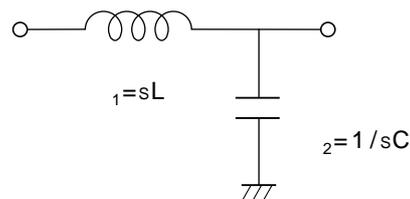
$|Z| \ Z_0 \dots 20 \log |S_{11}| = 28 - 20 \log |Z| \dots \dots \dots (4 \cdot 51)$

これらの関係式を逆に解けば、Sパラメータからインピーダンスを求めることは可能である。インピーダンスがわかれば、インピーダンスを表現する諸量 (L、C、Q、tan など、表7) にも換算できる。ただし、この方法は「2端子部品のインピーダンス」という概念が存在する低い周波数に限られるということに注意しなくてはならない。高い周波数では、実在の (大きさのある) 部品は1ポートとみなせなくなるからである。

4-4. LCフィルタの動作伝送係数

前節の応用として、図13に示すLCフィルタの動作伝送係数 S_B (入出力インピーダンスは Z_0 とする) を求めてみる。 S_B はT行列の要素を用いて $S_B=1/S_{21}=T_{22}$ と書けるので、 T_{22} のみを計算すればよい。

LCフィルタ (図13)



全体のT行列 T_L は、各素子のT行列の積で表わされる。

$$T_L = \frac{1}{4 \hat{Z}_2} \begin{bmatrix} 2 - \hat{Z}_1 & \hat{Z}_1 \\ -\hat{Z}_1 & 2 + \hat{Z}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\hat{Z}_2 - 1 & -1 \\ 1 & 2\hat{Z}_2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & (2 + \hat{Z}_1 \hat{Y}_2 + \hat{Z}_1 + \hat{Y}_2) / 2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4 \cdot 52)$$

従って、 S_B は

$$S_B = \frac{2 + \hat{Z}_1 \hat{Y}_2 + \hat{Z}_1 + \hat{Y}_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 + \frac{s}{\omega_0} \left(\frac{\omega_L + \omega_C}{\omega_0} \right) + 2 \right) \dots\dots\dots(4 \cdot 53)$$

となる。ただし、 s は複素周波数、 $L = Z_0/L$ 、 $C = 1/CZ_0$ 、 $\omega_0 = \sqrt{LC} = 1/LC$ である。これを2次のLPF(ローパスフィルタ)の標準形、

$$S_B = \left(s^2 + \frac{b}{Q}s + b^2 \right) / b^2 \dots\dots\dots(4 \cdot 54)$$

と比較すると、

$$b = \sqrt{2} \omega_0, Q = \frac{\sqrt{2} \omega_0}{\omega_C + \omega_L} \dots\dots\dots(4 \cdot 55)$$

となっていることがわかる。このときcut-off周波数は、

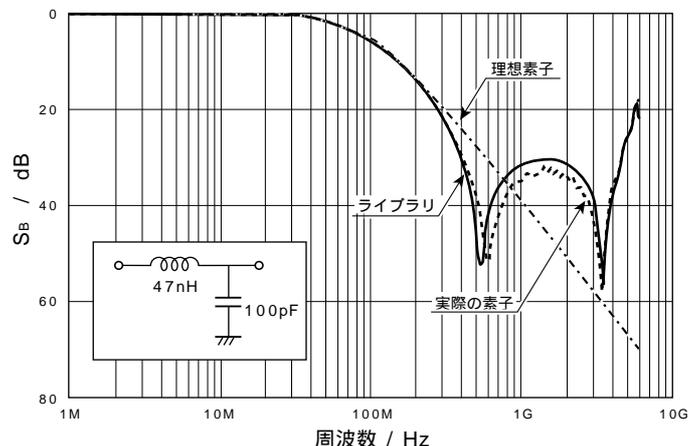
$$\frac{\omega_{cut-off}}{b} = \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right)^2 + 1} \dots\dots\dots(4 \cdot 56)$$

と求まる。

TDK S-parameter Data Libraryの簡単な応用例として、上記のLCフィルタを考えてみる。47nHのインダクタ(MLK1005S47NJ)と100pFのコンデンサ(CH1H101J)を組み合わせると、50MHz付近にcut-offのあるLPFになるはずである。L、Cが理想素子であればそうなのだが、実際の素子には自己共振が存在するため減衰域に極が現われる(図14)。TDK S-parameter Data Libraryを用いてシミュレーションすると、これら2つの極が再現される。

次回は「基準インピーダンスの変更」について述べる。

LCフィルタの動作減衰量(図14)



注意
記述が煩雑になるのを避けるため、行列の要素で自明な部分、あるいは必要の無い部分は「*」として省略した。

- 参考書
- (3) 例えば、榊米一郎、大野克郎、尾崎弘、「電気回路(第2版)」、オーム社、1980
 - (4) 伊理正夫、「岩波講座 応用数学 線形代数 I」、岩波書店、1993
 - (5) 例えば、中島将光、「マイクロ波工学」、森北出版、1975
 - (6) 例えば、池田哲夫、「回路網理論」、丸善、1980



基準インピーダンスの変更

電子部品事業本部
藤城 義和

前2回ではSパラメータの基本的事項をまとめた。それを受けて今回からこの連載の目標である電子部品の評価について述べる。今回のテーマは次の2つである。

5章：基準インピーダンスを変更するとS行列はどうなるか

6章：S行列で特性づけられている素子の入力インピーダンスを求める

この2つの章を同じ回に載せたのは、それらが根幹ではつながっているからである。計算原理を与えた後、シミュレータの活用方法と実際の例を示す。

5. 基準インピーダンスの変更

ノイズフィルタの性能はカタログを見ただけではわからないとしばしば言われる。それは記載されている伝送特性が50系での値であり、実際に使ってみるとカタログデータのような効果は得られないということが一因として挙げられる。そのような問題を解消するのが本章の主題である。

Sパラメータの値は基準インピーダンスで規格化されている。従って、基準インピーダンスを指定しないとS行列は一意に決まらない(通常は50であり、それは省略される。しかし原理的には任意に決めてよい)。逆に言えば、S行列は基準インピーダンスで値が変わるということになる。一方、Z行列やY行列にはそういった不定性はない。回路行列で表現されているブラックボックス(nポート回路)の本質は基準インピーダンスという規格値で変化するわけではないので、ある基準インピーダンスのときのS行列がわかれば、別な基準インピーダンスのときのS行列は求まるはずである。すなわち同じ物を別な形式で表現しているだけなのだから、それらは相互に変換可能でなければならないということである。もしそうでないならばS-parameter data libraryは「ライブラリ」にならない。なぜなら50のときのSパラメータの他に100のときのSパラメータ、200のときのSパラメータ...とたくさん準備しなくてはならないからである。

5-1 変換式

(1) 変換式の導入

基準インピーダンスの変更がS行列にどう影響するのか、その計算方法を具体的に示す。Z行列には不定性がないことを利用し、S行列をいったんZ行列に変換して、あらためて別な基準インピーダンスを基にS行列に戻すという操作($S \rightarrow Z \rightarrow S'$)をする。

表1(前々号Vol.31)に示したように、S行列とZ行列は次のような関係式で結ばれている。

$$S = \begin{matrix} \Delta_- & 1 \\ \Delta_+ & 1 \end{matrix} \quad Z = \begin{matrix} 1+S \\ 1-S \end{matrix} \quad (5.1)$$

従って、元のS行列Sの基準インピーダンス行列を Z_0 、変換後

のS行列 S' の基準インピーダンス行列を Z_0' と書くと、上記2式を用いて

$$S' = Z_0'^{-1/2} (Z - Z_0') (Z + Z_0')^{-1} Z_0'^{1/2} \\ = Z_0'^{-1/2} \begin{pmatrix} 1+S & \\ & 1-S \end{pmatrix} Z_0'^{1/2} \cdot Z_0' \begin{pmatrix} 1+S & \\ & 1-S \end{pmatrix} Z_0'^{-1/2} Z_0'^{1/2} \quad (5.2)$$

となる。これを整理すると、

$$S' = W^{-1} (S - \Gamma) (I - \Gamma S)^{-1} W \quad (5.3)$$

と書ける⁽²⁾。ただし W, Γ は次のような対角行列である。

$$W = \begin{matrix} 2(Z_0' \cdot Z_0)^{1/2} \\ Z_0' + Z_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{Z_{01}' Z_{01}} & & & \\ & 2\sqrt{Z_{02}' Z_{02}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2\sqrt{Z_{0n}' Z_{0n}} \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

$$\Gamma = \begin{matrix} Z_0' - Z_0 \\ Z_0' + Z_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} Z_{01}' - Z_{01} & & & \\ & Z_{02}' - Z_{02} & & \\ & & \ddots & \\ & & & Z_{0n}' - Z_{0n} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

この W と Γ は、 $\Gamma^2 + W^2 = I$ という関係にある。従って、 $W = \sqrt{I - \Gamma^2}$ と書いてもよい。また実際の計算に際しては、 W を定数倍しても構わない。各ポートの基準インピーダンスが全て等しい場合($Z_{01} = Z_{02} = \dots = Z_{0n}, Z_{01}' = Z_{02}' = \dots = Z_{0n}'$)は、 Z_0, Z_0', W, Γ がスカラー行列(単位行列のスカラー倍)になるので、

$$S' = \begin{matrix} S - \Gamma \\ I - \Gamma S \end{matrix} \quad (5.6)$$

のように式が簡略化される。以上で求めた(5.3)(5.6)式が基準インピーダンスの変更を施す基本式である。

2ポートの場合を考える。 Z_{01}, Z_{02} だった基準インピーダンスを Z_{01}', Z_{02}' に変更したときの新しいS行列は、(5.3)式に

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{01}' \cdot Z_{01} & 0 \\ Z_{01}' + Z_{01} & \\ 0 & Z_{02}' \cdot Z_{02} \\ & Z_{02}' + Z_{02} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

を代入して、

$$S' = \frac{1}{1 \cdot S_{11} + 2S_{22} + 1 \cdot 2|S|} \begin{bmatrix} S_{11} + 1 \cdot 2S_{22} \cdot 1 \cdot 2|S| & S_{12} \sqrt{(1 \cdot 1^2)(1 \cdot 2^2)} \\ S_{21} \sqrt{(1 \cdot 1^2)(1 \cdot 2^2)} & S_{22} + 1 \cdot 2S_{11} \cdot 2 \cdot 1|S| \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

と書き下される。各ポートの基準インピーダンスが等しい場合 ($Z_1 = Z_2 = Z_0$) は、もう少し簡単になる。

$$S' = \frac{S_{11} + 2S_{22}}{1 + S_{11} + S_{22} + 2|S|} \begin{bmatrix} S_{11} + 2S_{22} \cdot (1 + |S|) & (1 \cdot 2)S_{12} \\ (1 \cdot 2)S_{21} & S_{22} + 2S_{11} \cdot (1 + |S|) \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

ここで注意したいのは、例えば S_{21} だけを求めたいときでも、元の S 行列の要素全て ($S_{11}, S_{21}, S_{12}, S_{22}$) が必要だということである。

(2) 回路での表現

基準インピーダンスの変更を回路で表現するには、理想トランスを用いればよい。当該ポートに 1:n の理想トランス (ここでは $n=0$ に限定する) を挿入すると基準インピーダンスが $1/n^2$ になる (4-2節 (1) 参照)

このことを2ポート回路で確認してみる。簡単のため両ポートとも同じ変更を施す場合を考える (図15)。理想トランスを付加したときの S 行列 S' を求めるには、それぞれを T 行列に変換して、

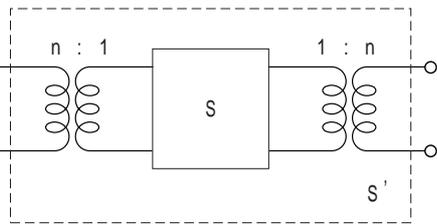


図15 基準インピーダンスの変更を表す回路

$$T' = T_{n:1} \cdot T \cdot T_{1:n} \quad (5.10)$$

を計算すればよい。理想トランスの T 行列は、(4.17) 式で表わされるので、それを代入して、

$$T' = \frac{1}{1 \cdot 2} \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ = \frac{1}{1 \cdot 2} \begin{bmatrix} T_{11} \cdot (T_{21} \cdot T_{12}) \cdot 2T_{22} & T_{12} + (T_{11} \cdot T_{22}) \cdot 2T_{21} \\ T_{21} \cdot (T_{11} \cdot T_{22}) \cdot 2T_{12} & T_{22} + (T_{21} \cdot T_{12}) \cdot 2T_{11} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

となる。これを S 行列に戻すと (5.9) 式に一致する。

従って、基準インピーダンスの変更は、所望のポートに巻数比 n が

$$n = \sqrt{\frac{Z_0}{Z_0'}} = \sqrt{\frac{1 \cdot}{1 +}} = \tan(\theta/2) \quad (5.12)$$

の理想トランスを付けることによって実現される。ちなみに各ポートに 1:n の理想トランスを付けると、 Z 行列 (Y 行列) は n^2 倍 ($1/n^2$ 倍) になる。それは回路に含まれる各素子のインピーダンスを n^2 倍したことに相当する。すなわち回路が L, C, R および理想トランスで構成されているならば、それらを $n^2L, C/n^2, n^2R$

に置き換えればよい。

(3) シミュレータの活用方法

回路シミュレータ (HP社のTouchstone/Series) で「基準インピーダンスの変更」を実行するには、もちろん上記のように理想トランスを挿入してもよいが、もっと簡単な方法もあるので、ここではそれを紹介する。

Touchstoneでは特に指定をしていなければ、各ポートの基準インピーダンスは RREF で定義された値となる ($RREF > 0, \text{default window}$ に最初から置いてあるのは 50 になっている。もし RREF がなければ 50 となる)

全てのポートの基準インピーダンスを (同じ値で) 変えたいならばこの RREF を変えればよい。例えば 75 系の S パラメータが欲しければ、 $RREF=75$ にする。この状態で S パラメータファイルを保存すると、ヘッダーが # MHz S MA R 75 というふうになる。

特定のポートの基準インピーダンスだけを変えたいならば、testbench内でDUTの所望のポートにREFGAMMA (任意インピーダンス, $|\Gamma| = 0, |\Gamma| = 1$) あるいはREFNET (任意回路) をターミネートすればよい。これがつながっていないポートは RREF の値を参照する。

ネットワークアナライザで S パラメータを測定するのであれば、次のような方法もある。HP8510CではTRL optionを設定しておくで基準インピーダンスを任意の値に設定できる。ただしその設定は全ての周波数に適用される。つまり周波数毎に基準インピーダンスを変えるという芸当はできない。

5-2 変換式の適用例

(1) 伝送線路

具体例として無損失伝送線路 (特性インピーダンス Z_0 , 伝播定数 $\gamma = jk$) の場合を計算してみる。無損失伝送線路の S 行列 S_x は基準インピーダンスを線路の特性インピーダンスにとると、

$$S_x = e^{-jkx} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

と表わされる ((4.4) 式)。これに (5.8) 式を適用し、基準インピーダンスを変更すると、

$$S_x' = \frac{1}{1 \cdot 1 \cdot 2e^{-2jkx}} \begin{bmatrix} \cdot 1 + 2e^{-2jkx} & e^{-jkx} \sqrt{(1 \cdot 1^2)(1 \cdot 2^2)} \\ e^{-jkx} \sqrt{(1 \cdot 1^2)(1 \cdot 2^2)} & \cdot 2 + 2e^{-2jkx} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

となる (4-1節で複雑すぎるという理由のため書かなかった式がこれである ($x=0$ にすると (4.12) 式に一致する))。この S_x の反射成分 (対角要素)

$$S_{x'11} = \frac{\cdot 1 + 2e^{-2jkx}}{1 \cdot 1 \cdot 2e^{-2jkx}} \quad (5.15)$$

は次のように解釈される。分子は (ポート1自身の反射, $\cdot 1$) + (ポート2まで行って帰ってくる反射, $2e^{-2jkx}$) である。分母はそれらの多重反射を表わしている。それは、 $|x| < 1$ のとき、

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (5.16)$$

と級数展開されることから理解できる。一方、伝送成分(非対角要素)は各ポートでの不整合がある分、減少している。その減少割合Aは、

$$A = \frac{\sqrt{(1 - \Gamma_1^2)(1 - \Gamma_2^2)}}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2j\theta}} \quad (5.17)$$

である(APPENDIX I)。分子の $\sqrt{(1 - \Gamma_1^2)}$ はポート1での不整合、 $\sqrt{(1 - \Gamma_2^2)}$ はポート2での不整合、分母はそれらの多重反射を表わしている(APPENDIX II)。無損失伝送線のS行列はUnitary行列だから、 $|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1$ となる(3-3節参照)。従って、 $|S_{11}|$ が増えれば、その分 $|S_{21}|$ の方が減るのは当然である。

(2) 2端子部品

2端子インピーダンスZを使った例を考える。最初に最も簡単な1ポートの場合で検証してみる。インピーダンスZの反射係数は、基準インピーダンスが Z_0 のとき、

$$S = (Z - Z_0) / (Z + Z_0) \quad (5.18)$$

と表わされる(ここでは今までの記号を踏襲するので反射係数にSという文字を用いる)。基準インピーダンスを Z_0 に変えた場合、 $\Gamma = (Z_0' - Z_0) / (Z_0' + Z_0)$ として、(5.6)式を適用すると、

$$S = (Z - Z_0') / (Z + Z_0') \quad (5.19)$$

が得られる。この結果は当然である。いくつかの具体的な数値例を挙げる。

元のSパラメータ(1ポートなので反射係数と言うべき)が、 $S = \pm 1$ (完全反射)ならば、基準インピーダンスをいくつに変えても完全反射($S = \pm 1$)となる。

元のSパラメータが、 $S = 0$ (整合)でも、基準インピーダンスを変えると、 $S = -\Gamma$ と反射する。

次に2端子部品をseries-thru配置した場合を計算してみる。元のS行列Sは、

$$S = \frac{1}{Z/Z_0 + 2} \begin{bmatrix} Z/Z_0 & 2 \\ 2 & Z/Z_0 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

と表わされる(表5(前号Vol.32))。この基準インピーダンスを Z_0 に変更すると、(5.9)式を適用し、

$$S' = \frac{1}{Z(1 - \Gamma)/Z_0 + 2(1 + \Gamma)} \begin{bmatrix} Z(1 - \Gamma)/Z_0 & 2(1 + \Gamma) \\ 2(1 + \Gamma) & Z(1 - \Gamma)/Z_0 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

となる。これに、 $\Gamma = (Z_0' - Z_0) / (Z_0' + Z_0)$ を代入すると、無事

$$S' = \frac{1}{Z/Z_0' + 2} \begin{bmatrix} Z/Z_0' & 2 \\ 2 & Z/Z_0' \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

と変形される。

基準インピーダンスの変更で実際の電子部品の特性がどう変わるかをみる。図16にseries-thru配置したピーズの、図17にshunt-thru配置したコンデンサの特性を示す。4-3節で考察した通り、series-thruの場合、 Z_0 が大きくなると $|S_{11}|$ は小さくなり、逆に $|S_{21}|$ は大きくなる傾向(shunt-thruではそ

の反対)が確認される。

図16 ピーズの $|S_{11}|, |S_{21}|$ 特性

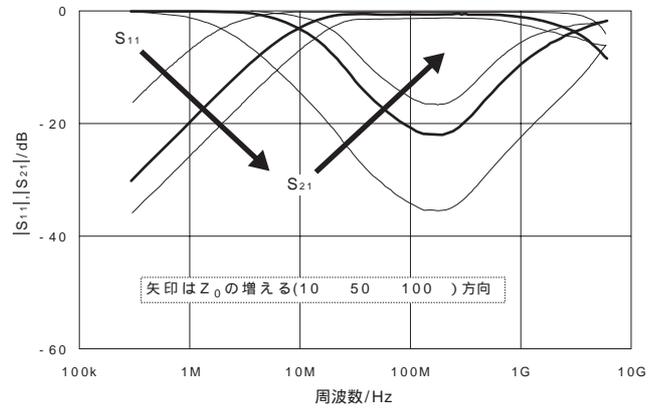
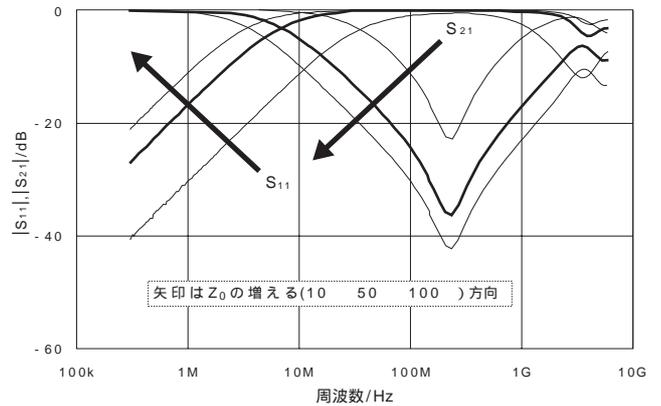


図17 コンデンサの $|S_{11}|, |S_{21}|$ 特性



5-3 映像パラメータとS行列の関係

(1) 映像パラメータ

まず2ポート相反回路の映像パラメータについて述べる¹⁾。映像イ

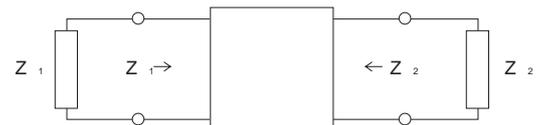


図18 映像インピーダンス

ンピーダンス $Z_{11} = 1/Y_{11}$, $Z_{12} = 1/Y_{12}$ (図18)、映像伝送量 Γ は、回路行列の要素を用いて、

$$Z_1 = \begin{pmatrix} AB \\ CD \end{pmatrix}^{1/2} = \begin{pmatrix} Z_{11} \\ Y_{11} \end{pmatrix}^{1/2} = Z_{01} \left(\frac{(1 + S_{11} - S_{22} \cdot |S|)(1 + S_{11} + S_{22} \cdot |S|)}{(1 - S_{11} - S_{22} \cdot |S|)(1 - S_{11} + S_{22} \cdot |S|)} \right)^{1/2} \quad (5.23)$$

$$Z_2 = \begin{pmatrix} DB \\ CA \end{pmatrix}^{1/2} = \begin{pmatrix} Z_{22} \\ Y_{22} \end{pmatrix}^{1/2} = Z_{02} \left(\frac{(1 - S_{11} + S_{22} \cdot |S|)(1 + S_{11} + S_{22} \cdot |S|)}{(1 - S_{11} - S_{22} \cdot |S|)(1 + S_{11} - S_{22} \cdot |S|)} \right)^{1/2} \quad (5.24)$$

$$|Z| = Z_1 Z_2 \quad (5.25)$$

$$(5.26)$$

$$\coth \Gamma = \begin{pmatrix} AD \\ BC \end{pmatrix}^{1/2} = (Z_{11} Y_{11})^{1/2} = (Z_{22} Y_{22})^{1/2} = \left(\frac{(1 + S_{11} - S_{22} \cdot |S|)(1 - S_{11} + S_{22} \cdot |S|)}{(1 - S_{11} - S_{22} \cdot |S|)(1 + S_{11} + S_{22} \cdot |S|)} \right)^{1/2}$$

と表わされる(平方根の符号は適当にとる^{7),8)}。対称性(4-1節参照)があるときは、 $Z_{11} = Z_{12}$ となり、式ももう少し簡単になる。その場合は反復パラメータと一致する。相反な2ポート回路は、これら3つのパラメータで決定される。実際、Z, Y, F行列を映像パラメータで表現すると、

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \coth & \sqrt{Z_1 Z_2} / \sinh \\ \sqrt{Z_1 Z_2} / \sinh & Z_2 \coth \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \coth & -\sqrt{Y_1 Y_2} / \sinh \\ -\sqrt{Y_1 Y_2} / \sinh & Y_2 \coth \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

$$F = \begin{bmatrix} \sqrt{Z_1 Y_2} \cosh & \sqrt{Z_1 Z_2} \sinh \\ \sqrt{Y_1 Y_2} \sinh & \sqrt{Y_1 Z_2} \cosh \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

となる。

(2) 固有挿入損失

これらの回路行列を(4.1)~(4.3)式と比較すると、伝送線の映像パラメータは、映像インピーダンス Z_{11}, Z_{12} が $Z_{11}=Z_{12}=Z_0$ で、映像伝送量が $\Gamma = x$ となっていることがわかる。逆に言えば、映像パラメータとは、対称な2ポート回路をそれと単一の周波数において等価な伝送線路と考えたときのパラメータだと言える。対称でない場合は、 Z_{11} または Z_{12} を特性インピーダンスにもつ伝送線路に、 $\sqrt{Z_1} \cdot \sqrt{Z_2}$ の理想トランス(一般にはその巻数比は複素数になる)を接続したものとなる。

従って、相反回路のS行列は基準インピーダンスを映像インピーダンスにとれば、伝送線路のS行列、(4.4)式のように、

$$S = e^{-\Gamma} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

という形になる。これは定義に戻って考えれば理解できる⁹⁾。映像インピーダンスはポートの左右を見たときに、(鏡像のように)等しいインピーダンスとなるような終端インピーダンスの組である(図18参照)。従って、各ポートは整合しているので反射がなく、またそのときの動作伝送量は映像伝送量に一致する。そしてT行列は、(4.5)式のように対角形となる(このことから、複合(隣り合う回路の映像インピーダンスを一致させて縦続接続すること)の場合、映像伝送量に相加則が成り立つのは容易にわかる)。従って、映像インピーダンスはS行列の対角要素を0にする、あるいはT行列を対角形にする特殊な基準インピーダンスの組だと表現してもよい。ただしそのような事が言えるのは、映像インピーダンスが正の実数の場合に限るということに注意しなければならない。複素数の範囲まで広げて一般化するには共役映像インピーダンス⁽¹⁰⁾と一般化S行列⁽²⁾という概念が必要になるが、本稿ではそこまでは踏み込まない。映像インピーダンスが実になるのは、例えばリアクタンスフィルタの通過域などが該当する。リアクタンス回路であれば、 Z_{11} や Y_{11} は純虚数だから、それらが同符号であれば、その商 Z_{11}/Y_{11} は(従って映像インピーダンス Z_{11} も)正の実数になる。一方、積 $Z_{11} \cdot Y_{11}$ は負の実数になるので、映像伝送量 $\Gamma = \operatorname{arccoth}(Z_{11} \cdot Y_{11})^{1/2}$ は純虚数になる。それに対して Z_{11} と Y_{11} が異符号のときは減衰域に相当し、通過域とは反対に映像インピーダンスが純虚数になり、映像伝送量が実数になる。

図13(前号Vol.32)のLCフィルタで実際に計算してみる。このフィルタの映像パラメータは、(5.23)~(5.26)式より、

$$Z_{11} = \sqrt{Z_{11}/Y_{11}} = \sqrt{Z_1(Z_1 + Z_2)} = R\sqrt{1 + (s/\omega_0)^2} \quad (5.31)$$

$$Z_{12} = \sqrt{Z_{22}/Y_{22}} = 1/\sqrt{Y_2(Y_1 + Y_2)} = R/\sqrt{1 + (s/\omega_0)^2} \quad (5.32)$$

$\coth \Gamma = \sqrt{Z_{11} Y_{11}} = \sqrt{1 + Y_1 Z_2} = \sqrt{1 + 1/(s/\omega_0)^2}$ (5.33)と求まる。ここでRは

$$R = \sqrt{L/C} \quad (5.34)$$

であり、公称インピーダンスと言われる。映像インピーダンスは $s \rightarrow 0$ の極限で、公称インピーダンスRと一致する。このフィルタの場合、 $\Gamma < 0$ が通過域ということになる。基準インピーダンスをこの映像インピーダンスに変更したS行列 S_L を求めるには、(5.8)式に

$$\Gamma_1 = (\hat{Z}_{11} - 1)/(\hat{Z}_{11} + 1) \quad \Gamma_2 = (1 - \hat{Y}_{12})/(1 + \hat{Y}_{12}) \quad (5.35)$$

を代入すればよい。この場合はT行列が求まっているので、それを使って計算した方が楽である。(5.8)式をT行列の要素を用いて書き直すと、

$$S_L' = \begin{bmatrix} 1 & T_{12} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\Gamma_1^2)(1-\Gamma_2^2)}} \\ T_{22} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\Gamma_1^2)(1-\Gamma_2^2)}} & T_{21} + \frac{1}{\sqrt{(1-\Gamma_1^2)(1-\Gamma_2^2)}} \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

となる(計算に際しては、 $|T| = 1$ (表2(前々号Vol.31)), $|S| = -T_{11}/T_{22}$ (3.17)式)という関係を利用した)。これに(4.5.2)式を代入すると、

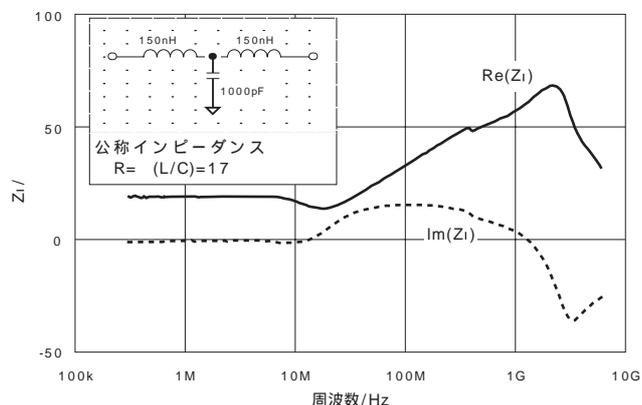
$$S_L' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{Z_1 Y_2} + \sqrt{1 + Z_1 Y_2} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

と求まる。これは(5.30)式に一致する。

このように基準インピーダンスを(共役)映像インピーダンスにとると、各ポートで完全整合するのであるから、映像伝達関数 $|\exp(-\Gamma)|$ は基準インピーダンスを様々に変えたときの $|S_{21}|$ の最大値になっている。そういう意味で、映像伝達関数は一種の回路不変量であり、固有挿入損失⁽¹¹⁾と言われる。整合された状態から基準インピーダンスを変えるとどうなるかは、無損失の場合についてだけであるが、5.2節(1)で見た通りである。

以上のことを実際のフィルタで検証してみよう。例としてT型LCフィルタACF321825-102を取り上げる。まずこのフィルタの映像インピーダンスをSパラメータから(5.23)(5.24)式で計算する(図19)。Cut-off周波数より充分低い周波数では、映像インピーダンスはほぼ一定で、19.5 と読み取れる。

図19 T型LCフィルタの映像インピーダンス



一方、等価回路(TDK等価回路モデルライブラリ、<http://www.tdk.co.jp/tjbch01/index.htm>参照)から(5.34)式で公称インピーダンスを概算すると17 となる。両者はほぼ一致する。そこで、基準インピーダンスを19.5 の 10^0

倍($n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$)に振ったときのSパラメータを求めてみる(図20(a)(b))。基準インピーダンスが19.5 のときは、整合しているので通過域の $|S_{11}|$ がかなり小さい(約 -60dB)。しかし、基準インピーダンスがそれからずれると、反射や伝送損失が増加してくる(APPENDIX I 参照)。

図20(a) T型LCフィルタの $|S_{11}|$ 特性

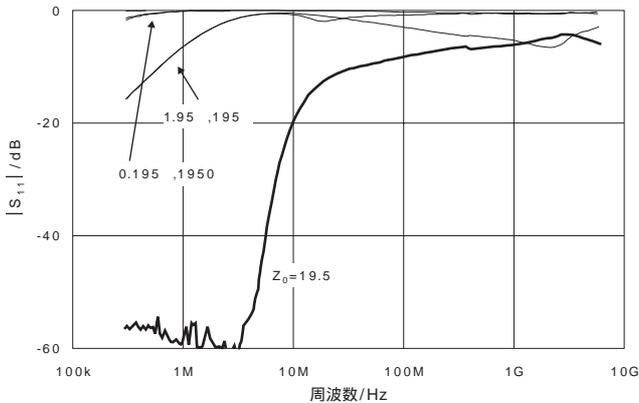
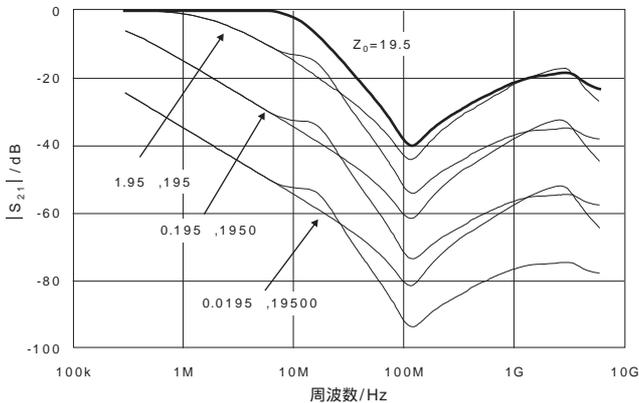


図20(b) T型LCフィルタの $|S_{21}|$ 特性



ところで、2端子部品をseries-thru配置したものは映像インピーダンスが、shunt-thru配置したものは0とみなすことができる。図16,17で見たような2端子部品の基準インピーダンス依存性は、本節の流儀で考えれば、それらの映像インピーダンス(あるいは0)からのずれを示していると表現してもよい。

6. 入力インピーダンス

6-1 入力インピーダンスの算出

2ポート部品のポート2側を、インピーダンス $Z_2=1/Y_2$ で終端したときのポート1での入力インピーダンス $Z_{IN}=1/Y_{IN}$ 、あるいは反射係数 Γ_{IN} を求める。

まず正攻法で考える。ポート2の終端条件は、 $V_2=Z_2 I_2$ あるいは $I_2=Y_2 V_2, a_2=\Gamma_2 b_2$ と表わされる。これを加味して、(3・1)~(3・4) 式を解けば、

$$Z_{IN} = Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{22} + Z_2} = \frac{AZ_2 + B}{CZ_2 + D} \quad (6.1)$$

$$Y_{IN} = Y_{11} - \frac{Y_{12} Y_{21}}{Y_{22} + Y_2} = \frac{C + DY_2}{A + BY_2} \quad (6.2)$$

$$\Gamma_{IN} = S_{11} + \frac{\Gamma_2 S_{12} S_{21}}{1 - \Gamma_2 S_{22}} \quad (6.3)$$

と求まる。ただし、 $\Gamma_2=(Z_2 - Z_{02})/(Z_2 + Z_{02})$ である。この

(6・3) 式はnポートにも拡張できる^(12,13)。ポート2が特別な終端条件になっている場合を表8に示す。

終端条件	Z_{IN}, Y_{IN}	Γ_{IN}
short: $Z_2=0, \Gamma_2=-1$	$Y_{IN}=Y_{11}=D/B$	$\Gamma_{IN} = S_{11} - \frac{S_{12} S_{21}}{1 + S_{22}}$ (6.4)
open: $Y_2=0, \Gamma_2=1$	$Z_{IN}=Z_{11}=A/C$	$\Gamma_{IN} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21}}{1 - S_{22}}$ (6.5)
match: $Z_2=Z_{02}, \Gamma_2=0$		$\Gamma_{IN} = S_{11}$

表8 特別な終端条件のときの反射係数、入力インピーダンス

次に「基準インピーダンスの変更」を利用して解いてみる(ただしこの方法は実用的ではない)。基準インピーダンスをポート2だけ Z_2 に変更したときのS行列 S' の1,1要素が Γ_{IN} に相当している。なぜならS行列の要素は各ポートを基準インピーダンスで終端したときの反射、伝送係数だからである。

実際に計算してみる。基準インピーダンス行列を、

$$Z_0 = \begin{bmatrix} Z_{01} & 0 \\ 0 & Z_{02} \end{bmatrix} \Rightarrow Z_0' = \begin{bmatrix} Z_{01} & 0 \\ 0 & Z_2 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

に変換するとき、(5・5) 式の Γ は

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

と表わされる。これを(5・3) 式に代入する。ただし対角要素だけを求めるのであれば、Wを除いた

$$S'' = (S - \Gamma)(I - \Gamma S)^{-1} \quad (6.8)$$

を考えればよい。実際に計算を進めると、

$$S'' = \frac{1}{1 - \Gamma_2 S_{22}} \begin{bmatrix} S_{11}(1 - \Gamma_2 S_{22}) + \Gamma_2 S_{12} S_{21} & * \\ * & * \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

となる。従って、

$$\Gamma_{IN} = S''_{11} = S_{11} + \frac{\Gamma_2 S_{12} S_{21}}{1 - \Gamma_2 S_{22}} \quad (6.10)$$

が再び導かれる。ここでは入力インピーダンスを代数的に求めたが、もちろんシグナルフローグラフを使って解いてもよい。

6-2 入力インピーダンスの応用

Sパラメータから入力インピーダンスを求める式((6・3)~(6・5) 式)の応用として、「2端子インピーダンスの測定」と「伝送線路の特性インピーダンスの測定」を取り上げる。

(1) LΓZ法

一般に高周波で2端子部品のインピーダンスを求める方法として、shunt to GND配置の入力インピーダンスを測定する「反射係数法」が知られている⁽¹⁴⁾。本節で紹介する方法はそれをアレンジしたものである。部品をseries-thru配置にして、いったん2ポートのSパラメータを測定する。その後、ポート2側を演算上で接地させ、反射係数を求める(図21, 毎回こう言うのは面倒なので、以下この方法をLΓZ法と呼ぶ)

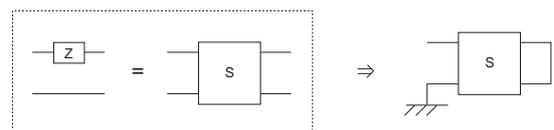


図21 LΓZ法

「ポート2側を演算上で接地させる」というのは、具体的に書けば次のような計算である(6・4式)

$$\Gamma = S_{11} - \frac{S_{12}S_{21}}{1+S_{22}} \quad (6 \cdot 11)$$

インピーダンスに直すには、この Γ を用いて、

$$Z = Z_0 \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = Z_0 \frac{1+S_{11}+S_{22}+|S|}{1-S_{11}-S_{22}-|S|} = 1/Y_{11} \quad (6 \cdot 12)$$

とすればよい。

測定のとくに接地させても、後に演算上で接地させても理論上では同じになるはずである。一応検証してみる。2端子部品をseries-thru配置したときのS行列(表5(前号Vol.32))を、(6・11)式に代入すると、

$$\Gamma = \hat{Z}/(\hat{Z}+2) \cdot \frac{(2/(\hat{Z}+2))^2}{1+\hat{Z}/(\hat{Z}+2)} = \frac{\hat{Z}-1}{\hat{Z}+1} \quad (6 \cdot 13)$$

となり、shunt to GND配置の反射係数と一致する。

L Γ Z法は、式を使って計算するよりシミュレータを使った方が簡単である。回路図は図22に示す。インピーダンスを算出するには(6・12)式を使っても構わないが、Touchstone/Series

では入力インピーダンスを求め素子“Z1(Other measurements内)が用意されているので、そちらの方が便利である。

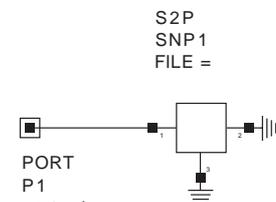
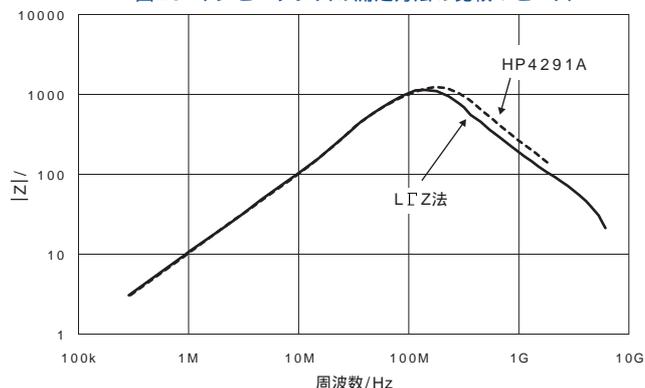


図22 L Γ Z法をシミュレータで実行する

図23にピーズの実測例を示す。

インピーダンスアナライザHP4291Aでの測定値とL Γ Z法による換算値(元のSパラメータは図4(前々号Vol.31)を参照)を比較した。両者はおおむね一致しているが、自己共振周波数に30MHz程度の違いが見られる。静電容量に換算すると0.01pF~0.1pFであり、その主要因はランドパターンの容量および左右のランド間容量であると思われる(Sパラメータは基板にはんだ付けして測定している)場合によっては、その他にも治具の作り方(スルーホールの有無,GND面との相互作用,方向性など)で値が変わってくるので十分な吟味をしなければならない。

図23 インピーダンスの測定方法の比較: ピーズ



またL Γ Z法を適用するには以下の点に留意する必要がある。この方法は本質的に反射係数法と同じなので、部品のインピーダンスが50Ωから離れてくると測定精度が悪くなる。この方法で求まるインピーダンスは、あくまでポート2を接地させたときの入力インピーダンス(すなわちY行列の1/Y₁₁)である。従って、実在の量であるから4-3節に書いたような心配はいらない。

(2)伝送線路

無損失伝送線路(特性インピーダンス Z_0 ,伝播定数 $\gamma = jk$)のポート2側を $Z_2 = Z_0(1+\Gamma_2)/(1-\Gamma_2)$ で終端したときの入力インピーダンスを求める。伝送線路のS行列、(4・4)式を(6・3)式に代入すると、 $\Gamma_{IN} = e^{-2\gamma x} \Gamma_2$ と計算される。この結果は自明である。一方、F行列、(4・1)式からは(6・1)式を使って、

$$Z_{IN} = Z_2 + Z_0 \tanh \gamma x = Z_0 \frac{Z_2 + Z_0 \tanh \gamma x}{Z_2 \tanh \gamma x + Z_0} \quad (6 \cdot 14)$$

となるが、 $\Gamma_{IN} = (Z_{IN} - Z_0)/(Z_{IN} + Z_0)$ として書き換えると、

$$\Gamma_{IN} = e^{-2\gamma x} \Gamma_2 = -e^{-2\gamma x} \Gamma_1 \quad (6 \cdot 15)$$

と同じ形に変形される。ただし、 Γ_1 はポート1の位置角($\Gamma_1 = \Gamma_2 e^{-\gamma x}$, $\tanh \gamma x = Z_2/Z_0$)である。

この結果を応用して伝送線路の特性インピーダンス Z_c を求めることができる(ここでは紛らわしくないように、特性インピーダンスには Z_c という文字を用いる)。ポート2をopen,shortしたときの入力インピーダンス $Z_{open} = Z_{11}$, $Z_{short} = 1/Y_{11}$ は(6・14)式より、

$$Z_{open} = Z_c \coth \gamma x \quad Z_{short} = Z_c \tanh \gamma x \quad (6 \cdot 16)$$

となる。従って、

$$Z_c = (Z_{open} \cdot Z_{short})^{1/2} = (Z_{11}/Y_{11})^{1/2} \quad (6 \cdot 17)$$

と書ける(Open/Short法, APPENDIX III)。この場合も、実際にopenあるいはshortで終端したときのインピーダンスを測定するのではなく、50Ω終端の通常の2ポートSパラメータを測定し、演算上でopen,shortすればよい。その操作は、(6・4)(6・5)式を使うと、

$$Z_{open} = Z_0 \frac{1+\Gamma_{open}}{1-\Gamma_{open}} \quad \Gamma_{open} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}}{1-S_{22}} \quad (6 \cdot 18)$$

$$Z_{short} = Z_0 \frac{1+\Gamma_{short}}{1-\Gamma_{short}} \quad \Gamma_{short} = S_{11} - \frac{S_{12}S_{21}}{1+S_{22}} \quad (6 \cdot 19)$$

と表わされるので、それらを(6・17)式に代入し、

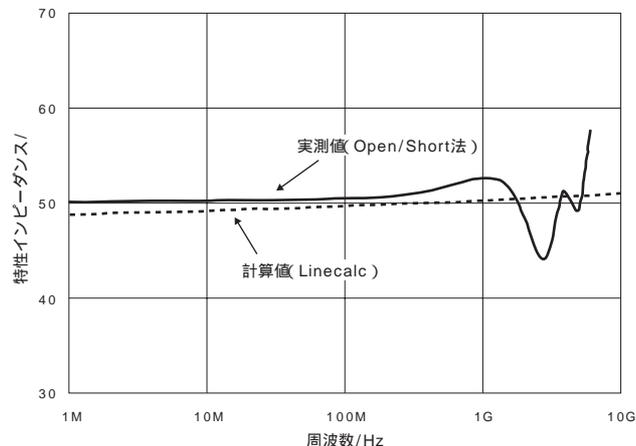
$$Z_c = \sqrt{\frac{(1+S_{11}+S_{22}+|S|)(1+S_{11}-S_{22}-|S|)}{(1-S_{11}+S_{22}-|S|)(1-S_{11}-S_{22}+|S|)}} \quad (6 \cdot 20)$$

と求まる。これは映像インピーダンス Z_{11} を計算していることに相当する((5・23)を参照)。

この方法だと1回の測定で済むので楽である。と同時に、実際にopen,shortしているわけではないので、計算が発散しないというメリットもある。

実際例として図24にマイクロストリップ基板の計算結果を示す。今回は「モード変換」について述べる。

図24 マイクロストリップ基板の特性インピーダンス



APPENDIX I

まず(5・17)式を証明する。物理的に考えれば、 $|S_{21}| = 1$ なのだから自明であるが、一応証明する。

$(1 - \Gamma_1^2)(1 - \Gamma_2^2) - (1 - \Gamma_1\Gamma_2)^2 = -(1 - \Gamma_2)^2 = 0$ だから、 $\sqrt{(1 - \Gamma_1^2)(1 - \Gamma_2^2)} = |1 - \Gamma_1\Gamma_2|$ が成り立つ(等号は $\Gamma_1 = \Gamma_2$ のとき)。従って、 $|1 - \Gamma_1\Gamma_2| = |1 - \Gamma_2 e^{-2j\beta x}|$ を証明すればよい。 $\Gamma_2 = 0$ のときは等号が成立するのは明らかなので、まず $\Gamma_2 > 0$ のときを考える。

$1 - \Gamma_1\Gamma_2 e^{-2j\beta x}$ は x が変わったとき、ガウス平面上で中心 1 、半径 $\Gamma_1\Gamma_2$ (定義より $|\Gamma_1| < 1, |\Gamma_2| < 1$ だから半径は 1 以下)の円周を動く。 $1 - \Gamma_1\Gamma_2$ は円周

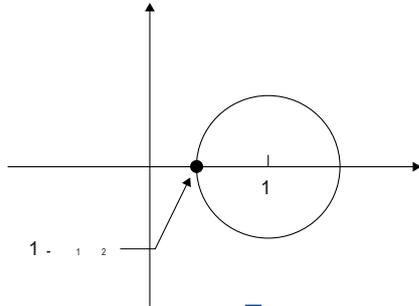


図25

の左端(図25)なので、どんな x に対しても $|1 - \Gamma_1\Gamma_2 e^{-2j\beta x}| \geq |1 - \Gamma_1\Gamma_2|$ となっている(等号は $kx = n\pi$ のとき)。一方、 $\Gamma_2 < 0$ の場合は、 Γ_1, Γ_2 のどちらかが負ということになるが、ここでは一般性を損なわず、 $\Gamma_2 < 0$ としよう。そして、 $\Gamma_2 = -\Gamma_3$ とよく今度は、

$$\left| \frac{\sqrt{(1 - \Gamma_1^2)(1 - \Gamma_3^2)}}{1 + \Gamma_1\Gamma_3 e^{-2j\beta x}} \right| \geq 1 \quad (A \cdot I \cdot 1)$$

を証明すれば良いことになる。 $1 + \Gamma_1\Gamma_3 e^{-2j\beta x}$ も同様に円周上を動くので、(A・I・1)式は成り立つ(等号は $kx = (n + 1/2)\pi$ のとき)。証明終。

次に A によって A がどう変化するかをみる。簡単のため $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ の場合を考える。そのとき、

$$A = \left| \frac{1 - \Gamma^2}{1 - \Gamma^2 e^{-2j\beta x}} \right| \quad (A \cdot I \cdot 2)$$

となる。これは x に関して偶関数である。従って、 $0 \leq x \leq \lambda/4$ の範囲だけを考えればよい。 A はその範囲では単調減少する。一方、

$$S_{x'11} = \frac{(e^{-2j\beta x} - 1)}{1 - \Gamma^2 e^{-2j\beta x}} \quad (A \cdot I \cdot 3)$$

は x の奇関数であり、 $|S_{x'11}|$ は $0 \leq x \leq \lambda/4$ の範囲で単調増加する。まとめると、 $|S_{x'11}|$ が大きくなると Z_0 が Z_0 から離れると、 $|S_{x'11}|$ は増加し、 $|S_{x'21}|$ は減少する(図26はその一例)。

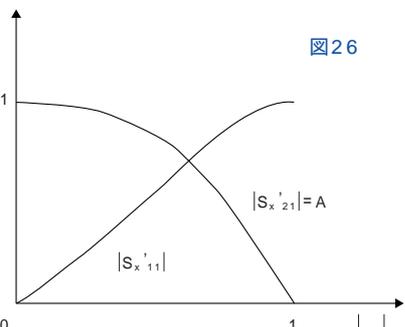


図26

APPENDIX II

一般に反射係数 $\Gamma = (Z - Z_0)/(Z + Z_0)$ の1ポート部品には $1 - |\Gamma|^2$ だけの電力が送り込まれる。波振幅で書けば、 $P = a^*a - b^*b = (1 - |\Gamma|^2)a^*a$ である。この関係は直流でも成り立つ(8)。

内部抵抗 R_0 をもつ電圧源 E に負荷抵抗 R を付けた状態を想定

する(図27)。負荷にかかる電圧を V とすると、そこに流れる電流 I は、 $V = E - R_0 I = R I$ より $I = E / (R + R_0)$ と求まる。従って、負荷での消費電力 P は、 $P = V I = E^2 R / (R + R_0)^2$ となる。 P の最大値 P_{AV} (有能電力)は、 $R = R_0$ のときで、 $P_{AV} = E^2 / 4 R_0$ 、

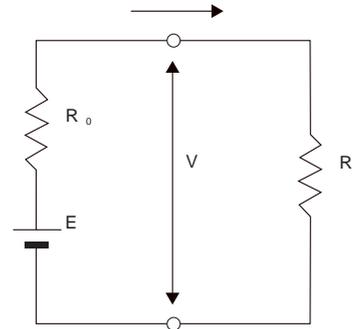


図27

$V = E/2$ となる。この状態を整合していると言う。 P_{AV} を用いると、 P は、 $P = P_{AV} (1 - \Gamma^2)$ と書ける。ただし、 $\Gamma = (R - R_0)/(R + R_0)$ である。これは「始め、電力 P_{AV} を送ったのだが、そのうち Γ^2 だけ反射して戻ってきた」かのように解釈できることを意味している。すなわち不整合があると、 $1 - \Gamma^2$ だけしか電力が伝わらない。

APPENDIX III

伝送線路の特性インピーダンス Z_c は、他端を open, short したときの入力インピーダンス Z_{open}, Z_{short} から、 $Z_c = (Z_{open} \cdot Z_{short})^{1/2}$ と計算される。従って、 $|Z_c| = (|Z_{open}| \cdot |Z_{short}|)^{1/2}$ 、 $\arg(Z_c) = (\arg(Z_{open}) + \arg(Z_{short}))/2 + n\pi$ となる(ただし $\text{Re}(Z_c) > 0$ なので、整数 n は $-\pi/2 < \arg(Z_c) < \pi/2$ となるように選ばなければならない)。

ちなみに、伝播定数は、 $\alpha = \arctanh(Z_{short}/Z_{open})^{1/2}$ と表わされる。この場合も $\text{Re}(\alpha) > 0$ となるよう開平するのが普通である(従って、 $\text{Im}(\alpha) = k < 0$)。それでも $2n$ の不定性は残るので、位相定数 k を正しく求めるのであれば、長さ x に何波長乗っているかを別途調べる必要がある。

注意: 記述が煩雑になるのを避けるため、行列の要素で自明な部分、あるいは必要の無い部分は「*」として省略した。

- (7) 永井健三, 神谷六郎, 「改訂伝送回路網学」, コロナ社, 1954
- (8) 高橋秀俊, 「線型集中定数系論」, 岩波書店, 1969
- (9) 尾崎弘, 黒田一之, 「回路網理論」, 共立全書, 1959
- (10) S. Roberts, "Conjugate-Image Impedances", Proc. IRE vol. 34, pp198-204, April, 1946
- (11) K. Tomiyasu, "Intrinsic Insertion Loss of a Mismatched Microwave Network", IRE Trans. MTT-1, pp40-44, 1955
- (12) S.W. Wedge, R. Compton, D. Rutledge, "PUFF 2.0 マニュアル" の10章「PUFFの内部」, PUFFについては、石飛徳昌, 「マイクロ波シミュレータの発展傾向と選択について」, 信学技報 MW98-78, pp23-30, 1998 参照
- (13) 小口文一, 「マイクロ波およびミリ波回路」, 丸善, 1964
- (14) 例えば、大森俊一, 横島一郎, 中根央, 「高周波・マイクロ波測定」, コロナ社, 1992



モード変換

電子部品事業本部
藤城 義和

第7章ではモード変換について述べる。対称性のある部品はモード変換を施すことにより、見通しを良くすることができる。しかし、モード変換にはいくつかの異なった定義があるため、使い方を誤ると却って混乱を招きかねない。本章ではそのことに留意して、モード変換の理論と実際例を考察する。今回はその前半部分、モード変換の定義と最も簡単な2ポート部品の場合について述べる。

この連載は当初4回(今回が最終回)の予定であったが、分量が増えたため、連載をもう少し延長させていただくことにした。

7. モード変換

7-1 モード変換の定義

最初に例を挙げる。2ポート回路があり、ポート1の電圧が7V、ポート2の電圧が3Vであったとする。これは電圧ベクトルで書くと、

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

である。この状態は別な表現を用いても指定できる。例えば、「ポート1とポート2の平均が5Vで、両ポートの差が4V」と表現してもよい。それを

$$v' = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

と書く。これは、電圧ベクトルを

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

という規則で変換したことになる。このように変換規則さえはっきりさせておけば、同じ状態を別な表現で表わすことが可能である。特に(7.3)式のような線形変換は基本的かつ重要であり、線形代数では「基底の取り替え(モード変換)」と言われている。基底の取り替えを視覚的に表現すれば、図28のような座標軸の回転(と鏡映および伸縮)に相当する。この例では、元の縦横の軸から見て、斜め45度に座標軸を取り直している。このような面倒なことをなぜするのであろうか。

それは、ものによっては、斜めから見たほうがわかりやすい場合があるからである。回路行列で言えば、対称性のよい回路がそれに該当する。回路に対称性があれば、適当な基底(モード)を取ることにより、

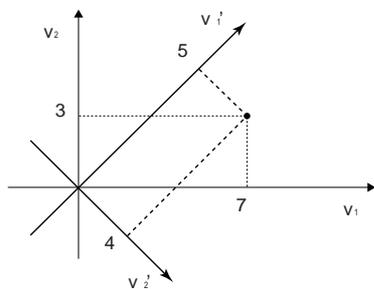


図28 座標軸の取り替え

見通しのよい形に表わすことができる。その具体例は後述するとして、本節ではそういった変換の基本について述べる。

モード変換を一般的に書けば、

$$v = T_v \cdot v' \quad i = T_i \cdot i' \quad (7.4)$$

と表わされる。 v, i はモード変換する前の電圧、電流ベクトル、 v', i' はモード変換した後の電圧、電流ベクトルを表わす(本章では単位行列を大文字のIと書くので、電流(と電圧)ベクトルは小文字のi

(とv)を使う)。また T_v, T_i は変換行列であり、ここでは以下の2条件を満たすものとする。

実正則条件: T_v, T_i は実正則行列である。

電力条件: $T_i^* \cdot T_v = I$ 。

実行列に限定したのは、取り扱いが容易だからである。正則ということは、逆行列が一意に定まる、すなわち変換が一对一対応するということを表わしている。従って、必要であれば、モード変換したものをまた元に戻すことができる。電力条件というのは、複素電力(電流ベクトル*i*と電圧ベクトル*v*の内積*i*^{*}・*v*)がモード変換しても変わらないということを意味している。

$$i^* \cdot v = i'^* \cdot T_i^* \cdot T_v \cdot v = i'^* \cdot v' \quad (7.5)$$

T_v, T_i が実行列(条件)であることを考慮すると、電力条件は、 $T_i \cdot T_v = I$ と書くことができる。この条件があると、 T_v と T_i のどちらかが定まると他方は自動的に決まってしまう。

モード変換を施すと、回路行列はどうなるのであろうか。S行列は、特性インピーダンス Z_{0i} ($i=1, 2, \dots, n$)の半無限長線路を通して励振したときの応答である。そこで、まずその半無限長線路がモード変換によってどのような影響を受けるのかを考える⁽¹⁵⁾。

話を簡単にするため、モード変換する前の各ポートの基準インピーダンスは全て等しいもの($Z_{01}=Z_{02}=\dots=Z_{0n}$)とする。もしそうでなければ、5章に記した「基準インピーダンスの変更」を行ない、等しくなるように整えておけばよい。その半無限長線路に、あるモードの進行波だけが励振されているという状態を考える。代表として、モード1のみ励振されているとすると、それは、

$$v'_{1+} = \begin{bmatrix} V'_{1+} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad i'_{1+} = \begin{bmatrix} I'_{1+} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

と書くことができる。このとき各ポートにおける進行波の電圧、電流は(7.4)式より、

$$v_+ = \begin{bmatrix} T_{v11}V'_{1+} \\ T_{v21}V'_{1+} \\ T_{v31}V'_{1+} \\ \vdots \\ T_{vn1}V'_{1+} \end{bmatrix} \quad i_+ = \begin{bmatrix} T_{i11}I'_{1+} \\ T_{i21}I'_{1+} \\ T_{i31}I'_{1+} \\ \vdots \\ T_{in1}I'_{1+} \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

となっているはずである。この v_+ と i_+ の各要素は線路の特性インピーダンスによって、次式のように関係付けられている。

$$\begin{matrix} T_{V11}V'_{1+} \\ T_{I11}i'_{1+} \end{matrix} = Z_{01} \quad \begin{matrix} T_{V21}V'_{1+} \\ T_{I21}i'_{1+} \end{matrix} = Z_{02} \quad \cdots \quad \begin{matrix} T_{Vn1}V'_{1+} \\ T_{In1}i'_{1+} \end{matrix} = Z_{0n} \quad (7.8)$$

従って、モード1の特性インピーダンス $Z'_{01}=v'_{1+}/i'_{1+}$ が、スカラーとして定義されるためには、

$$Z'_{01} = \frac{T_{I11}}{T_{V11}} Z_{01} = \frac{T_{I21}}{T_{V21}} Z_{02} = \cdots = \frac{T_{In1}}{T_{Vn1}} Z_{0n} \quad (7.9)$$

となっている必要がある。これに前提条件、 $Z_{01}=Z_{02}=\cdots=Z_{0n}$ ($=Z_0$)を加味すると、

$$\begin{matrix} Z_0 \\ Z'_{01} \end{matrix} = \begin{matrix} T_{V11} \\ T_{I11} \end{matrix} = \begin{matrix} T_{V21} \\ T_{I21} \end{matrix} = \cdots = \begin{matrix} T_{Vn1} \\ T_{In1} \end{matrix} = D_1^2 \quad (7.10)$$

と書くことができる。ただし、(7.10)式の比を D_1^2 とおいた。同様のことを、全モードについて考えれば、結局、

$$T_V = T_I \cdot D^2 \quad (7.11)$$

となる。ただし D は、

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_n \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

のような対角行列である。ここでは、この条件を満たすモード変換のみを対象とする。この第三の条件と先の電力条件を合わせると、 T_V, T_I は

$$T_V = U \cdot D \quad (7.13)$$

$$T_I = U \cdot D^{-1} \quad (7.14)$$

という形に限定される。ただし、 U は直交行列 ($U^T U = I$)である。一般に実正則な行列 A は、直交行列 U と正定値実対称行列 H の積 ($A = UH$, 極分解)として一意に表わすことができる。従って、(7.12)式の D_i は、 $D_i > 0$ としても一般性は失われない。そこで、以下では D_i を正の実数として扱う。

このような変換、(7.13)(7.14)式を施すと、モード i の特性インピーダンス Z'_{0i} は、(7.10)式からわかるように、

$$Z'_{0i} = Z_0 / D_i^2 \quad (7.15)$$

となる。特殊な場合として、 $D = I$ (単位行列)のときを考える。その場合は、 $T_V = T_I = U$ (直交行列)となり、モード変換しても特性インピーダンスは変わらない ($Z'_{0i} = Z_0$)。このような変換を直交変換と言う。

7-2 モード変換を施した回路行列

最初に前節で規定したモード変換をまとめておく。

$$v = T_V \cdot v' \quad T_V = U \cdot D \quad (7.16)$$

$$i = T_I \cdot i' \quad T_I = U \cdot D^{-1} \quad (7.17)$$

v, i はモード変換する前の電圧、電流ベクトル、 v', i' はモード変換した後の電圧、電流ベクトル、 U は直交行列、 D は対角要素が正の対角行列である。

このモード変換によって波振幅ベクトルはどうなるのであろうか。波振幅ベクトルは、電圧、電流ベクトルと(3.6)~(3.8)式のような関係がある。従って、波振幅ベクトル a は

$$a = \frac{\sqrt{Y_0} v + \sqrt{Z_0} i}{2} = \frac{\sqrt{Y_0} T_V v' + \sqrt{Z_0} T_I i'}{2} = U \frac{\sqrt{Y_0} D v' + \sqrt{Z_0} D^{-1} i'}{2} = U a' \quad (7.18)$$

と変換される。ただし、各ポートの基準インピーダンスが全て等

しいということを前提にしているので、基準インピーダンス行列はスカラー ($Z_0 = 1/Y_0$)として扱われていることに注意。ここで、 a はモード変換された波振幅ベクトル

$$a = \frac{Z_0^{-1/2} \cdot v' + Z_0^{1/2} \cdot i'}{2} \quad (7.19)$$

である。 Z'_0 はモード変換した後の基準インピーダンス行列 (各モードの基準インピーダンスを対角要素とする対角行列)であり、

$$Z'_0 = Z_0 D^{-2} \quad (7.20)$$

と表わされる(7.15)式参照) 同様に波振幅ベクトル b は、

$$b = U b' \quad (7.21)$$

と変換される。ただし、 b は、

$$b = \frac{Z_0^{-1/2} \cdot v' - Z_0^{1/2} \cdot i'}{2} \quad (7.22)$$

である。

以上のようなモード変換((7.16)(7.17)式あるいは(7.18)(7.21)式)によって、(3.1)(3.2)(3.4)式は、

$$v = Z i \quad v = T_V^{-1} Z T_I \cdot i' \quad (7.23)$$

$$i = Y v \quad i = T_I^{-1} Y T_V \cdot v' \quad (7.24)$$

$$b = S a \quad b = U^{-1} S U \cdot a' \quad (7.25)$$

となるので、 Z, Y, S の各回路行列は、

$$Z = T_I Z T_I = D^{-1} U^{-1} Z U D^{-1} \quad (7.26)$$

$$Y = T_V Y T_V = D U^{-1} Y U D \quad (7.27)$$

$$S = U^{-1} S U \quad (7.28)$$

と変換されたことになる。 S 行列は D の影響を受けないことに注意。 D の効果は、基準インピーダンスの方に含まれているのである。また逆変換は、

$$Z = T_V Z^{-1} T_V = U D Z^{-1} D U^{-1} \quad (7.29)$$

$$Y = T_I Y^{-1} T_I = U D^{-1} Y^{-1} D^{-1} U^{-1} \quad (7.30)$$

$$S = U S^{-1} U^{-1} \quad (7.31)$$

と表わされる。

次にモード変換された回路行列の性質を調べる。まず規格化 Z, Y 行列を定義する(3-1節参照)。モード変換した Z 行列、(7.26)式を規格化すると、

$$\hat{Z}' = Z'_0^{-1/2} \cdot Z' \cdot Z'_0^{1/2} = U^{-1} \hat{Z} U \quad (7.32)$$

となる。ただし、 $\hat{Z} = Z/Z_0$ はモード変換する前の規格化 Z 行列である。規格化すると S 行列同様 D の影響を受けなくなる。この規格化 Z 行列 \hat{Z} を用いると、 $(\hat{Z}' - I)(\hat{Z}' + I) = U^{-1} S U = S$ と計算される。規格化 Y 行列も同じようにして、

$$\hat{Y}' = Y'_0^{-1/2} \cdot Y' \cdot Y'_0^{1/2} = U^{-1} \hat{Y} U \quad (7.33)$$

と定義され、 S 行列とは $S = (I - \hat{Y}') / (I + \hat{Y}')$ という関係になる。従って、 Z, Y, S 行列はモード変換しても表1の関係がそのまま成り立つ。また簡単な計算により、表2に示した回路行列の性質はモード変換しても引き継がれることが確かめられる。例えば、相反性があれば、モード変換しても Z, Y, S 行列は対称行列 ($Z' = Z; Y' = Y; S' = S$)になるし、また無損失であれば、 S もUnitary行列になる。

7-3 変換回路

モード変換を回路で表現するとどうなるのであろうか(9.15, 16)。元の回路に $2n$ ポートの変換回路を付加することにより表わす(図2.9)とすれば、実正則条件と電力条件を満たす変換回路は、

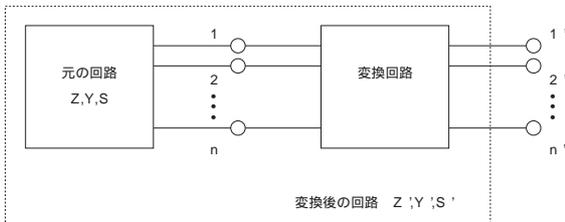


図29 モード変換を表現する回路

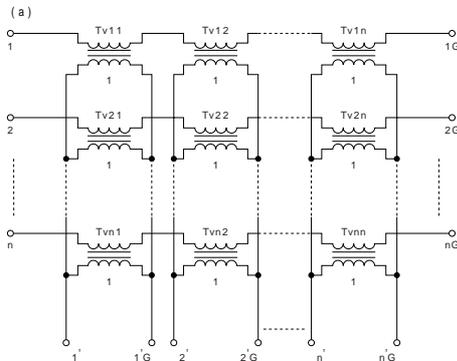


図30(a) 2nポート理想トランス網による変換回路

記号「G」は帰線側の端子であることを示す。

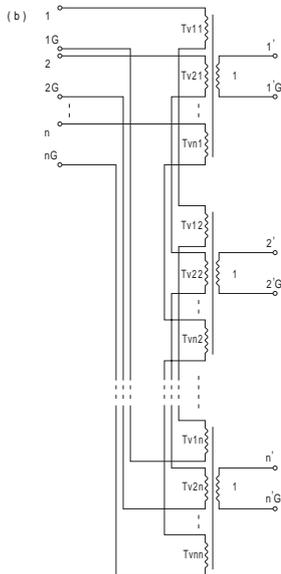


図30(b) 2nポート理想トランス網による変換回路

例えば、図30のような理想トランス網であればよい。このようなモード変換は、実在のポート1, 2, ..., nの線形結合を新たな(仮想的な)ポート1', 2', ..., n'として取り直したことに相当する。変換が正則であれば、線形独立なポートの数は変換前後で変わらない。

第三の条件、(7・11)式を加えると変換回路はもっと限定される。まず直交変換($T_V = T_I = U$)の場合を考える。直交変換の変換回路は、

$$S_M = \begin{bmatrix} 0 & U \\ U & 0 \end{bmatrix} \quad (7 \cdot 34)$$

という2n行2n列のS行列で表わされる。これは4分割に区分けされた対称直交行列であり、その変換回路は直交トランス網と呼ばれる⁽¹⁷⁾。この具体例は後述する。一般にS行列がSの回路に

$$S_M = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix} \quad (7 \cdot 35)$$

という2nポートのS行列をもつ変換回路を縦続接続すると、全体のS行列は $S \cong ASB$ になる^(18,19)。ただし、各ポートの基準インピーダンスは全て等しいとした。証明:変換回路のポートを図29の

ように1, 2, ..., nと1', 2', ..., n'に2分し、その入射波、反射波の波振幅をそれぞれa, bとa', b'とすると、変換回路の特性は、

$$\begin{bmatrix} b' \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ a \end{bmatrix} \quad (7 \cdot 36)$$

と書くことができる。従って、 $b' = Aa$ 、 $b = Ba'$ である。一方、ポート1, 2, ..., nはSで終端されているので、

$$a = Sb \quad (7 \cdot 37)$$

となっている(元の回路にとっては、入射波と反射波が逆になる)。従って、全体では $S' = ASB$ となる。証明終。これを(7・28)式に当てはめると(7・34)式が得られる。

次に、直交変換でない場合、すなわち一般に(7・16)(7・17)式で表わされるモード変換を考える。これは直交変換に引き続き、「基準インピーダンスの変更」を施したことに相当する。従って、回路で描けば図31のようになる。直交トランス網の先に1:1/D_iの理想トランスを挿入する。また逆変換、(7・29)~(7・31)式に対応させて、図32のように理解してもよい。

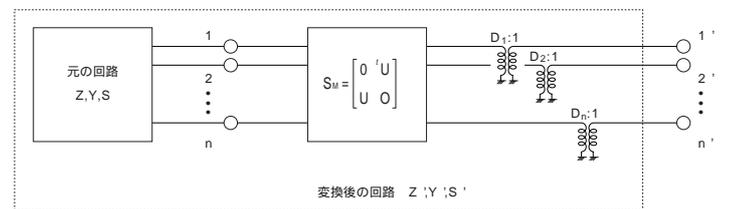


図31 (7・16)(7・17)式のモード変換を表現する回路

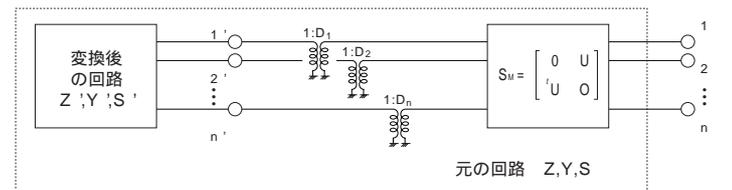


図32 (7・16)(7・17)式のモード変換を表現する回路(逆変換)

7-4 2ポート回路のモード変換

以上のようなモード変換を2ポート回路に適用してみる。2ポート回路は最も簡単な例であり、後節で扱う4ポート回路の準備とも位置付けられる。

(1) 偶奇(even/odd)モード

ここでは以下の直交変換を考える。

$$T_V = T_I = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = Q \quad (7 \cdot 38)$$

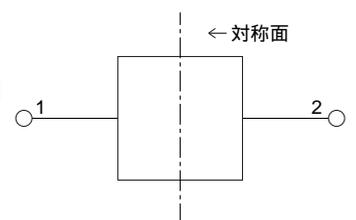
この行列は後でしばしば出てくるので、特にQと名付けておく。Qは対称直交行列であり、 $Q^{-1} = Q = Q^T$ が成り立つ。従って、逆変換もまたQで表わされる。(7・16)(7・17)式を具体的に書けば、

$$v = Qv' \quad i = Qi' \quad (7 \cdot 39)$$

$$v \cong Qv' \quad i \cong Qi' \quad (7 \cdot 40)$$

である。

この変換は対称性があるときに有効である。2ポート回路が図33のような対称性を持つならば、ポート1とポート2を置換しても特性は変わらないはずである。



このことが回路行列にどのような制限を与えるのかを考える。ポートを置換すると電圧、電流は、

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1\#} \\ V_{2\#} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1\#} \\ I_{2\#} \end{bmatrix} \quad (7.41)$$

と変わる。ここで、脚符「#」はポート置換後であることを示す。従って、ポートを置換したときのZ,Y行列は、

$$Z_{\#} = D^{-1} \cdot Z \cdot D \quad Y_{\#} = D^{-1} \cdot Y \cdot D \quad (7.42)$$

と表わされる。ただし、D は(7.41)式の置換行列

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.43)$$

である。対称性があれば、ポートの置換で特性は変わらないのであるから、 $Z_{\#} = Z, Y_{\#} = Y$ となっていなくてはならない。従って、 $Z \cdot D = D \cdot Z, Y \cdot D = D \cdot Y$ となる。すなわちZとD、YとDは交換可能ということである。行列の要素を用いて具体的に書けば、

$$Z_{11} = Z_{22}, Z_{12} = Z_{21} \quad (7.44)$$

$$Y_{11} = Y_{22}, Y_{12} = Y_{21} \quad (7.45)$$

となる。各ポートの基準インピーダンスが等しい場合(それを $Z_0 = 1/Y_0$ とする)規格化Z,Y行列は、 $\hat{Z} = Z/Z_0, \hat{Y} = Y/Y_0$ と書けるので、これらもDと交換可能である。このときS行列 $S = (\hat{Z} - 1)(\hat{Z} + 1)(1 - \hat{Y})(1 + \hat{Y})$ もまたDと可換になる。

$$S_{11} = S_{22}, S_{12} = S_{21} \quad (7.46)$$

Sと \hat{Z}, \hat{Y} は常に可換であるから、結局D,Z, \hat{Z}, Y, \hat{Y}, S は互いに可換ということになる。

Dは実対称行列であるから、直交行列で対角化できる。その固有値と固有ベクトルは、

$$\text{固有値 } \lambda_1 = 1, \quad \text{固有ベクトル } P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.47)$$

$$\text{固有値 } \lambda_2 = -1, \quad \text{固有ベクトル } P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (7.48)$$

である。固有値が縮重していないので、Dと可換なZ,Y,S行列もこの固有ベクトルで対角化可能である(APPENDIX IV)。従って、対称性のある2ポート回路に(7.38)式のモード変換を施すと、Z,Y,S行列

$$Z = Q^{-1} Z Q \quad Y = Q^{-1} Y Q \quad S = Q^{-1} S Q \quad (7.49)$$

は対角行列になることがわかった(ただしS行列の場合は両ポートの基準インピーダンスが等しい場合に限る)。そのときそれらの行列の対角要素は、

$$\hat{Z}_{ii} = 1 / \hat{Y}_{ii} = \frac{1 + S_{ii}}{1 - S_{ii}} \quad (7.50)$$

という関係にある(APPENDIX)。対称性がなければ、もちろんこの式は成り立たない。行列としては表1の関係になっているが、行列の(対角)要素まで同じ関係式が使えるのは対称な場合に限られる。従って、一般には $\hat{Z}'_{ii} \neq 1 / \hat{Y}'_{ii}$ なので注意を要する。

さて、(7.38)式のモード変換をしたとき、(7.47)式の固有ベクトル P_1 に対応するモードを偶(even)モード、(7.48)式の固有ベクトル P_2 に対応するモードを奇(odd)モードと呼ぶ。あるいは対称(symmetric)/反対称(antisymmetric)モードとも言う。それは、固有ベクトルがポートの置換により、変わらないか($D \cdot P_1 = P_1$)それとも負号がつくか($D \cdot P_2 = -P_2$)ということに相当している。(7.40)式を書き下すと次式のようになるが、

$$\begin{bmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} V_1 + V_2 \\ V_1 - V_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I'_1 \\ I'_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_1 + I_2 \\ I_1 - I_2 \end{bmatrix} \quad (7.51)$$

この $v_{1,i}$ がevenモード電圧、電流、 $v_{2,i}$ がoddモード電圧、電

流ということになる。以下ではeven/oddモードということをはっきり示すため、evenモードには「c」という文字を、oddモードには「d」という文字(後節と合わせるため、あえてc/dという文字を使う)を当て、

$$v_{1,i} \quad v_{c,i} \quad v_{2,i} \quad v_{d,i}$$

と記す。肩符は「」から「」に変える。波振幅にも同様な記号を適用する。それに対応させて、even/oddモードに変換したZ,Y,S行列は、次式のような記法で表わす(代表としてZ行列で示す)

$$\begin{bmatrix} V_c \\ V_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{cc} & Z_{cd} \\ Z_{dc} & Z_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_c \\ I_d \end{bmatrix} \quad (7.52)$$

even/oddモードへの変換は直交変換なので、基準インピーダンスは変換の前後で変わらない。すなわち、変換前の基準インピーダンスを Z_0 とすると、evenモード、oddモードの基準インピーダンスも Z_0 である。従って、基準インピーダンスをそれほど意識する必要はない。

実際にZ,Y,S行列をeven/oddモードに変換してみる。(7.49)式を実行すると、

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{cc} & Z_{cd} \\ Z_{dc} & Z_{dd} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Z_{11} + Z_{21} + Z_{12} + Z_{22} & Z_{11} + Z_{21} - Z_{12} - Z_{22} \\ Z_{11} - Z_{21} + Z_{12} - Z_{22} & Z_{11} - Z_{21} - Z_{12} + Z_{22} \end{bmatrix} \quad (7.53)$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{cc} & Y_{cd} \\ Y_{dc} & Y_{dd} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Y_{11} + Y_{21} + Y_{12} + Y_{22} & Y_{11} + Y_{21} - Y_{12} - Y_{22} \\ Y_{11} - Y_{21} + Y_{12} - Y_{22} & Y_{11} - Y_{21} - Y_{12} + Y_{22} \end{bmatrix} \quad (7.54)$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{cc} & S_{cd} \\ S_{dc} & S_{dd} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S_{11} + S_{21} + S_{12} + S_{22} & S_{11} + S_{21} - S_{12} - S_{22} \\ S_{11} - S_{21} + S_{12} - S_{22} & S_{11} - S_{21} - S_{12} + S_{22} \end{bmatrix} \quad (7.55)$$

となる。どれも同じ式で、Z/Y/Sの文字を入れ替えただけである。ちなみにこの場合は $Q^{-1} = Q$ なので、逆変換もまた同じ形式で表わされる。

対称性がある場合、(7.44)~(7.46)式が成り立つので、(7.53)~(7.55)式は、それぞれ、

$$Z^a = \begin{bmatrix} Z_{cc} & 0 \\ 0 & Z_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} + Z_{21} & 0 \\ 0 & Z_{11} - Z_{21} \end{bmatrix} \quad (7.56)$$

$$Y^a = \begin{bmatrix} Y_{cc} & 0 \\ 0 & Y_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} + Y_{21} & 0 \\ 0 & Y_{11} - Y_{21} \end{bmatrix} \quad (7.57)$$

$$S^a = \begin{bmatrix} S_{cc} & 0 \\ 0 & S_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} + S_{21} & 0 \\ 0 & S_{11} - S_{21} \end{bmatrix} \quad (7.58)$$

と簡単になる。モード変換によってZ,Y,S行列が対角化されるのは先に説明した通りである。非対角要素がゼロ(S行列で言えば、 $S_{dc} = S_{cd} = 0$)となっているのはevenモードとoddモードが干渉し合わないということを意味する。すなわちevenモードが励振されたときは、evenモードしか発生しないので、他のモードを気にする必要がない。このように扱う次元を下げるという作用が、モード変換を必要とする理由の一つである。

以上のeven/oddモードへの変換を回路で表現してみる。図30(a)を用いると、変換回路は図34(a)のように描ける。これは図11(b)と同じ形である。従って、ハイブリッド型に変形して図34(b)のように描いてもよい(図30(b),図10参照)。図中、C/Dはevenポート/oddポートを表わす。変換回路のS行列は、(7.34)式に $U=Q$ を代入して、

$$S_M = \begin{bmatrix} 0 & Q \\ Q & 0 \end{bmatrix} \quad (7.59)$$

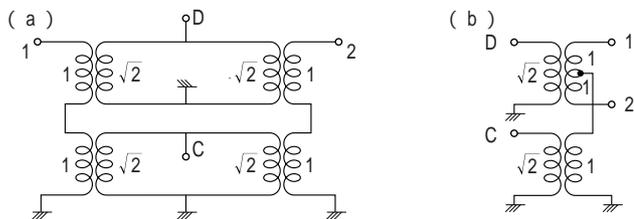


図34 even/oddモードへの変換回路

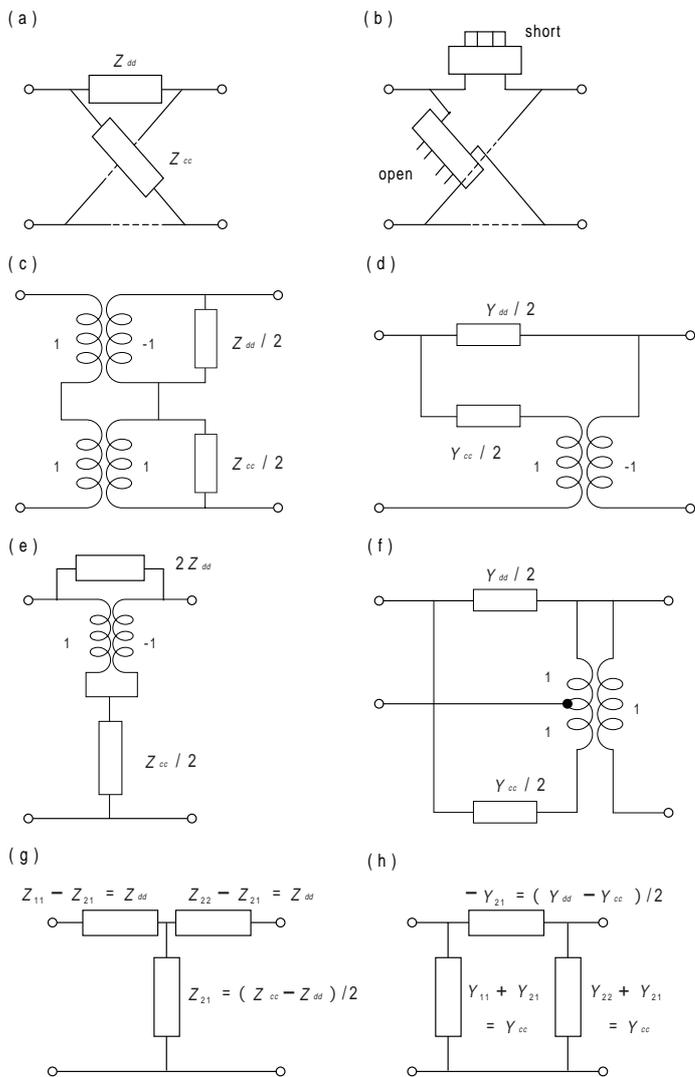


図35 対称2ポート回路の等価交換

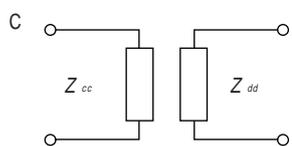


図36 モード変換後の対称2ポート回路

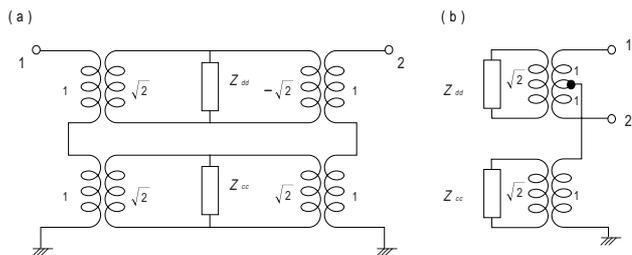


図37 モード変換を使って描いた対称2ポート回路

と表わされる。これは、マジックTのS行列、(4・45)式と同じポート2とポート3を交換しただけ)である。このことから変換回路が図10,11で描き表わされることが理解できる。

対称回路の場合を考える。対称性のある回路は、対称面で切り離し、その切り口を、evenモードであればopen、oddモードであればshort(共通帰線の場合は接地)した1ポート部品と等価である(二等分定理^(3,9))。このことを利用すると、 Z_{cc}, Z_{dd} を簡単に求めることができる(その例は7-6節参照)。次にその逆で、 Z_{cc}, Z_{dd} を使って元の2ポート回路を別な形で表現してみよう。対称な2ポート回路は、 $Z_{cc}=1/Y_{cc}, Z_{dd}=1/Y_{dd}$ を用いた図35(a)のような対称格子型回路と等価である。あるいは二等分定理を応用して、同図(b)のように視覚的に表わしてもよい。そしてそれらは、Riegger回路(c) Jaumann回路(d) その変形であるハイブリッド型回路(e, f)に変換できる。また形式的にはT型(g) 型(h)回路の形に描くこともできる。形式的と言ったのは、インピーダンスやアドミッタンスの差が現れるので、必ずしも実現可能とは限らない(負抵抗を許せば常に可能)からである。Riegger回路(c)とハイブリッド型回路(e)は図32を応用して次のように考えてもよい。(7・56)~(7・58)式は図36のようなshunt to GND配置の2ポート回路なので、図34の S_M を使って図32を具体的に描けば、図37のようになる。これが、図35のRiegger回路(c) ハイブリッド型回路(e)である。

(2) common/differentialモード

次に、

$$T_V = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \quad T_I = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix} \quad (7 \cdot 60)$$

というモード変換を考える。この場合、(7・16)(7・17)式を具体的に書けば、

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_c \\ V_d \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_c \\ i_d \end{bmatrix} \quad (7 \cdot 61)$$

$$\begin{bmatrix} V_c \\ V_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} i_c \\ i_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (7 \cdot 62)$$

となる。この変換行列で定義されるモードは、common/differentialモードと呼ばれることが多い。しかし本稿では紛らわしさを排除するため、このモードをC/Dモードと言い、電圧、電流、回路行列などの記号には肩符「」を付けて表わす。この変換の特徴は先のeven/oddモードと違い、 $\sqrt{2}$ という無理数を使わないところにある。直交変換ではないので理論構成は多少複雑になるが、無理数が出てこないのが数値にしたとき扱いやすい。

この変換行列 T_V, T_I は、

$$D = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (7 \cdot 63)$$

を用いて、 $T_V=QD, T_I=QD^{-1}$ と極分解される。従って、変換前の基準インピーダンスを Z_0 とすると、Cモードの基準インピーダンスは半分の $Z_0/2$ 、Dモードの基準インピーダンスは2倍で $2Z_0$ となる。そして、Z, Y行列は、

$$Z = D^{-1}Z_0 D^{-1} = \begin{bmatrix} Z_{cc}/2 & Z_{cd} \\ Z_{dc} & 2Z_{dd} \end{bmatrix} \quad (7 \cdot 64)$$

$$Y = D^{-1}Y_0 D^{-1} = \begin{bmatrix} 2Y_{cc} & Y_{cd} \\ Y_{dc} & Y_{dd}/2 \end{bmatrix} \quad (7 \cdot 65)$$

とモード変換される。具体的に書けば、

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{cc} & Z_{cd} \\ Z_{dc} & Z_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Z_{11}+Z_{21}+Z_{12}+Z_{22})/4 & (Z_{11}+Z_{21}-Z_{12}-Z_{22})/2 \\ (Z_{11}-Z_{21}+Z_{12}-Z_{22})/2 & Z_{11}-Z_{21}-Z_{12}+Z_{22} \end{bmatrix} \quad (7.66)$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{cc} & Y_{cd} \\ Y_{dc} & Y_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Y_{11}+Y_{21}+Y_{12}+Y_{22})/4 & (Y_{11}+Y_{21}-Y_{12}-Y_{22})/2 \\ (Y_{11}-Y_{21}+Y_{12}-Y_{22})/2 & (Y_{11}-Y_{21}-Y_{12}+Y_{22})/4 \end{bmatrix} \quad (7.67)$$

である。S行列はeven/oddモードのときと同じなので省略した (S = S (7.55)式参照)。対称性がある場合は、even/oddモードのときと同様にZ, Y, S行列は対角化される。

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{cc} & 0 \\ 0 & Z_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{cc}/2 & 0 \\ 0 & 2Z_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Z_{11}+Z_{21})/2 & 0 \\ 0 & 2(Z_{11}-Z_{21}) \end{bmatrix} \quad (7.68)$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{cc} & 0 \\ 0 & Y_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2Y_{cc} & 0 \\ 0 & Y_{dd}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(Y_{11}+Y_{21}) & 0 \\ 0 & (Y_{11}-Y_{21})/2 \end{bmatrix} \quad (7.69)$$

C / D モードへの変換を表現する回路は、図34(b)のCポートに $\sqrt{2}$ の、Dポートに $1/\sqrt{2}$ の理想トランスを挿入すればよい。それを整理したのが図38である。

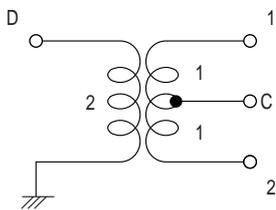


図38 C / D モードへの変換回路

比較のため、もう一つ別な変換を考察する。

$$T_v = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad T_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (7.70)$$

この変換行列で定義されるモードをC / D モードと言い、電圧、電流、回路行列などの記号には肩符「 v 」を付けて表わす。逆変換は、 $T_v^{-1}=T_i, T_i^{-1}=T_v$ であり、互いに他の逆になっている。この変換の特徴は、 T_i が単純なことである(その代わり逆変換 T_i^{-1} には $1/2$ がつくが)、この変換行列 T_v, T_i は、 $T_v=Q/\sqrt{2}, T_i=Q \cdot \sqrt{2}$ と書けるので、Cモード、Dモードとも変換によって基準インピーダンスは2倍となる。そしてZ, Y行列は、

$$Z = 2Z = \begin{bmatrix} Z_{11}+Z_{21}+Z_{12}+Z_{22} & Z_{11}+Z_{21}-Z_{12}-Z_{22} \\ Z_{11}-Z_{21}+Z_{12}-Z_{22} & Z_{11}-Z_{21}-Z_{12}+Z_{22} \end{bmatrix} \quad (7.71)$$

$$Y = Y/2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} Y_{11}+Y_{21}+Y_{12}+Y_{22} & Y_{11}+Y_{21}-Y_{12}-Y_{22} \\ Y_{11}-Y_{21}+Y_{12}-Y_{22} & Y_{11}-Y_{21}-Y_{12}+Y_{22} \end{bmatrix} \quad (7.72)$$

とモード変換される。S行列はeven/oddモードのときと同じである (S = S (7.55)式参照)。変換回路は、図34(b)のCポートとDポート両方に $1/\sqrt{2}$ の理想トランスを挿入すればよい(図39)。

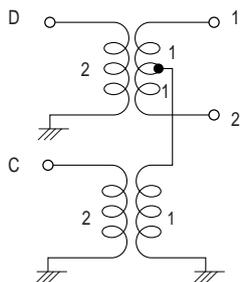


図39 C / D モードへの変換回路

7-5 2ポート回路の平衡・不平衡パラメータ

(1) 平衡・不平衡変換

前節までで述べたモード変換は、変換行列の在り方を中心に考えたものである。本節では少し視点を変えて、Z, Y行列の対角化ということを出発点として考察してみる。

ここでは、2ポート相反回路を対象とする。その変換行列 T_v, T_i はやや天下り式であるが、次の形とする。

$$T_v = \begin{bmatrix} 1 & / (1+) \\ 1 & -1/(1+) \end{bmatrix}, \quad T_i = \begin{bmatrix} 1/(1+) & 1 \\ / (1+) & -1 \end{bmatrix} \quad (7.73)$$

このは対象となる回路によって変わるパラメータであり(7.78)式参照) 一般には実数でないで、実正則条件や電力条件は満たさない(-1 であれば正則にはなっている、 $|T_v|=|T_i|=-1$) ももちろん(7.13)(7.14)式の形に書くこともできない。を対称度と称する(その意味は後にわかる) $1/$ を とする流儀もある。逆変換は、

$$T_v^{-1} = \begin{bmatrix} 1/(1+) & / (1+) \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = T_i, \quad T_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ / (1+) & -1/(1+) \end{bmatrix} = T_v \quad (7.74)$$

となる。この変換行列で定義されるモードは、平衡/不平衡(balance/unbalance)モードと呼ばれることが多い(20)。「平衡/不平衡」という言葉は前節のC / D モードに使われること(あるいはその逆)もあるが、混乱を避けるため、本稿では「平衡/不平衡」と言えば、上記の変換だけを指すものとする。この変換によって電圧、電流は、

$$\begin{bmatrix} V_u \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(1+) & / (1+) \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_u \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ / (1+) & -1/(1+) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (7.75)$$

となる。脚符「 u 」/「 b 」は不平衡/平衡を表わす。

以上のような変換を施すと、Z, Y行列は

$$Z = T_i Z T_i, \quad Y = T_v Y T_v \quad (7.76)$$

とモード変換される。肩符「 v 」は平衡/不平衡モードであることを示す。これが対角行列となるような T_v, T_i を求めてみよう。Z・Y = Iだから、両者は同時に対角化される。ここではZ行列の方で考える。Zを実際に計算すると、

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} + (Z_{21}+Z_{12}) + ^2 Z_{22} & Z_{11} - Z_{12} + (Z_{21} - Z_{22}) \\ (1+)^2 & 1+ \\ Z_{11} - Z_{21} + (Z_{12} - Z_{22}) & \\ 1+ & Z_{11} - Z_{21} - Z_{12} + Z_{22} \end{bmatrix} \quad (7.77)$$

となるから、これが対角型であるためには、

$$= \frac{Z_{11} - Z_{21}}{Z_{22} - Z_{21}} = \frac{Y_{22} + Y_{21}}{Y_{11} + Y_{21}} \quad (7.78)$$

でなければならない(相反性 $Z_{12}=Z_{21}$ を仮定した) このを用いると、Zは、

$$Z = \begin{bmatrix} |Z| / (Z_{11}+Z_{22} - 2Z_{21}) & 0 \\ 0 & Z_{11}+Z_{22} - 2Z_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_u & 0 \\ 0 & Z_b \end{bmatrix} \quad (7.79)$$

と書ける。同様にYは、

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11}+Y_{22}+2Y_{21} & 0 \\ 0 & |Y| / (Y_{11}+Y_{22}+2Y_{21}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_u & 0 \\ 0 & Y_b \end{bmatrix} \quad (7.80)$$

となる。これらの対角要素、 Z_u, Z_b は、

$$Y_u = 1/Z_u = Y_{11}+Y_{22}+2Y_{21} \quad (7.81)$$

$$Z_b = 1/Y_b = Z_{11}+Z_{22} - 2Z_{21} \quad (7.82)$$

であり、それぞれ不平衡インピーダンス、平衡インピーダンスと言う。両者の積は、 $|Z| = |T_i Z T_i| = |Z|$ より、 $Z_u Z_b = |Z|$ とな

っていることがわかる。 Z_u, Z_b の3つを指定すれば、2ポート相
反回路は決定される。これらを総称して、平衡・不平衡パラメータ
と称する。平衡・不平衡パラメータも Z, Y, S 行列同様、一種の回路
表現と考えられる。

even/oddモードあるいはC /D モードでは、対称性がない
回路の場合、 Z, Y 行列は対角化されない。それに対して、平衡/不
平衡モードでは常に対角型になる。それは変換行列や変換回路を、
元の回路(直接的には のこと)によって変えるからである。対称
性が良ければ、(7・44) (7・45) 式が成り立つので、(7・78) 式の
は $=1$ となる。そのとき、(7・73) 式の変換行列は (7・60) 式
に一致し、平衡/不平衡モードはC /D モードと同じになる。

(2) 平衡インピーダンス、不平衡インピーダンス

次に平衡インピーダンス、不平衡インピーダンスをどう求めた
らよいかを考える。(7・75) 式からわかるように、回路に
 $v_1=v_2=v$ の電圧を印加すると、 v_u は のいかにかわらず、
 $v_u=v$ となる。従って、 Z_u は、 $Z_u=v_u/i_u=v/(i_1+i_2)$ と計算される。
これは Z_u がポート1とポート2の並列接続として求められることを
示している(図40(a) 帰線が共通の場合は同図(b)のように描い
てもよい) またこのとき v_b, i_b は、 $v_b=i_b=0$ であるから $i_1:i_2=1:$
となっている。従って、対称性が良ければ ($=1$) $i_1=i_2$ となる。こ
れは図40(b)を見れば直感的にわかる。ポート1とポート2を直
結しているのだから、両ポートにかかる電圧は常に等しいが、電
流の方は回路が対称でなければ同じにならない。

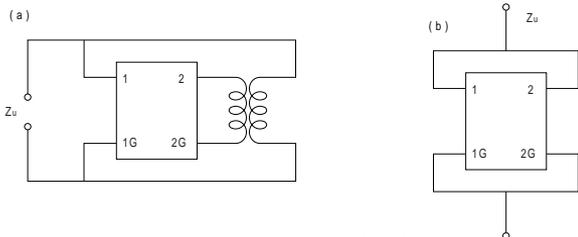


図40 不平衡インピーダンス Z_u

一方、 $i_1 = -i_2 = i$ の電流を流すと、 i_b は のいかにかわらず、
 $i_b=i$ となる。従って、 $Z_b=v_b/i_b=(v_1 - v_2)/i$ と計算される。これは
 Z_b がポート1とポート2の直列接続として求められることを示して
いる(図41(a) 帰線が共通の場合は同図(b)のように描いてもよ
い(回路が理想トランスの外側とつながっていなければ、図中の理
想トランスを省いても構わない)) またこのとき、 $i_u=v_u=0$ となっ
ている($v_1:v_2 = - :1$) 対称性が良ければ $v_1 = -v_2$ となる。

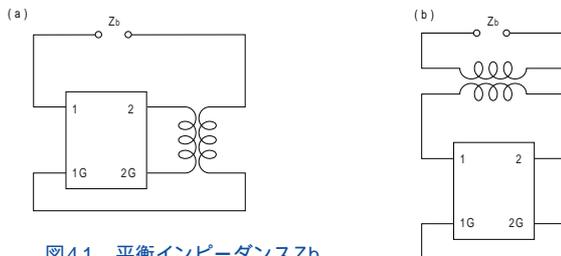
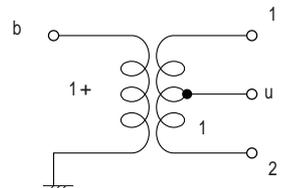


図41 平衡インピーダンス Z_b

が実数ならば、変換行列は実正則条件と電力条件を満たす。
そのような場合には、平衡/不平衡モードに変換する回路は、例え
ば、図42のように描くことができる。不平衡インピーダンス Z_u は、
 $v_b=0$ のときのインピーダンスであるから、図42でbalanceポー
トをshortすればよい。それは図40(b)に一致する。また同様に
平衡インピーダンス Z_b は、 $i_u=0$ のときのインピーダンスであるか

ら、図42のunbalanceポートを
openにしたものであり、図41(b)
に一致する。が実数でないとき
の変換回路は、巻数比が複素数の
理想トランスなど(APPENDIX



を想定する必要があると思われる 図42 平衡/不平衡モードへの変換回路
が、ここではこれ以上言及しない。

また、 Z_u, Z_b は次のようなものだとして認識してもよい。

Z_u : D ポートをshortしたときのC ポートの入力インピーダンス
 Z_b : C ポートをopenしたときのD ポートの入力インピーダンス
それは、(7・66) (7・67) 式と対比して、
 $Y_u = Y_{cc}$ (短絡駆動点アドミッタンス) (7・83)
 $Z_b = Z_{dd}$ (開放駆動点インピーダンス) (7・84)

となっているからである。あるいは、図38でD ポートをshortす
ると図40(b) C ポートをopenすると図41(b)になることからも
理解できる。対称性が良い場合は、 $Y_u (= Y_{cc}) = 1/Z_{cc}$,
 $Z_b (= Z_{dd}) = 1/Y_{dd}$ となり、 Z は Z と一致する。

以上のことをSパラメータでも計算してみる。D ポートを
shortしたときのC ポートの反射係数 Γ_u は、 $S = S$ の要素を用
いて

$$\Gamma_u = S_{cc} - \frac{S_{cd} S_{dc}}{1 + S_{dd}} \quad (7 \cdot 85)$$

と表わされる(6・4 式参照) 従って、

$$\hat{Y}_u = \frac{1 - \Gamma_u}{1 + \Gamma_u} = \frac{1 - S_{21} - S_{12} - |S|}{1 + S_{11} + S_{22} + |S|} \quad (7 \cdot 86)$$

となる。ただし、 $|S| = |U^{-1} S U| = |S|$ という関係を使った。
同様に、 $\hat{\Gamma}_b, \hat{Z}_b$ は、

$$\Gamma_b = S_{dd} + \frac{S_{cd} S_{dc}}{1 - S_{cc}} \quad (7 \cdot 87)$$

$$\hat{Z}_b = \frac{1 + \Gamma_b}{1 - \Gamma_b} = \frac{1 - S_{21} - S_{12} - |S|}{1 - S_{11} - S_{22} + |S|} \quad (7 \cdot 88)$$

となる。この \hat{Z}_u, \hat{Z}_b を、 $\hat{Y}_u = Y_u / 2 Y_0$, $\hat{Z}_b = Z_b / 2 Z_0$ であること
に注意して計算すると、(7・81) (7・82) 式に一致する。このこと
を測定やシミュレーションで実行するときは注意を要する。図40
(b), 41(b)を Z_0 終端で求めた反射係数(それを Γ'_u, Γ'_b とする)
は上記、 Γ_u, Γ_b とは一致しない。それは、 Γ_u の基準インピー
ダンスが $Z_0/2$ 、 Γ_b の基準インピーダンスが $2Z_0$ だからである。
 Γ'_u, Γ'_b を Γ_u, Γ_b に換算するには、(5・6) 式を適用し、

$$\Gamma_u = \frac{\Gamma'_u + 1/3}{1 + \Gamma'_u/3} \quad \Gamma_b = \frac{\Gamma'_b - 1/3}{1 - \Gamma'_b/3} \quad (7 \cdot 89)$$

と計算すればよい。あるいは最初から、図43, 44で Z_0 終端し
たときの値を求めればよい。これは、それぞれ、図34(b)のD ポー

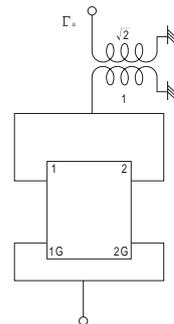


図43 Γ'_u の求め方

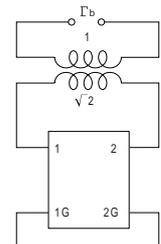


図44 Γ'_b の求め方

トをshort、Cポートをopenしたことに相当している。ただし、 Y_u, Z_b を求めるだけであれば、 Γ'_u, Γ'_b からも $(1 - \Gamma'_u)/(1 + \Gamma'_u) = \hat{Y}'_u = Y_u/Y_0, (1 + \Gamma'_b)/(1 - \Gamma'_b) = \hat{Z}'_b = Z_b/Z_0$ と計算できる。結局のところ、 Γ'_u, Γ'_b と Γ_u, Γ_b は、同じ Y_u, Z_b を異なる基準インピーダンスで規格化したに過ぎないのである。

Z_b は一見すると、6-2節(1)で紹介した「LΓZ法の入力インピーダンス」と同じものであるかのような印象を受けるが、特殊な場合(2端子部品をseries-thru配置したものなど)を除いて、両者は一致しない。

またこれらに関連して、

Z_t : CポートをshortしたときのDポートの入力インピーダンスというパラメータを考える。これは Z_b に似ているが、Cポートの処理(終端条件)が異なる。その終端条件に注意して計算をすると、

$$Y_t = Y_{dd} \text{ (短絡駆動点インピーダンス)} \quad (7.90)$$

$$\Gamma_t = S_{dd} - \frac{S_{cd} S_{dc}}{1 + S_{cc}} \quad (7.91)$$

$$\hat{Y}'_t = \frac{1 - \Gamma_t}{1 + \Gamma_t} = \frac{1 + S_{21} + S_{12} - |S|}{1 + S_{11} + S_{22} + |S|} \quad (7.92)$$

であることがわかる。ただし、 $\hat{Y}'_t = Y_t/(Y_0/2)$ である。対称性が良い場合は、 $Z_t = Z_b$ となる。また Z_t を回路で表現するには、図38でCポートをshortすればよい。従って、図45のように描くことができる。この場合の基準インピーダンスの取り方は Z_b に準ずる。図45で使った「中間タップを接地した3巻線トランス」は、Balun (balanced-to-unbalancedからの造語)と呼ばれることもある。

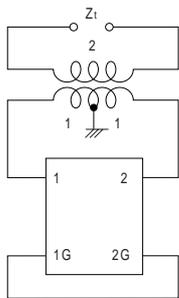


図45 Z_t

7-6 2ポート回路のモード変換の例

表9にモード変換のいくつかの例を示す。(4.16)式や表5の回路行列に(7.66)(7.67)(7.55)式を適用し、C/Dモードに変換した。

構成	Z	Y	S = S
series-thru 	無	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G(Z/2) \end{bmatrix}$
shunt-thru 	$\begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	無	$\begin{bmatrix} G(2Z) & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
shunt to GND 	$\begin{bmatrix} (Z_1+Z_2)/2 & Z_1-Z_2 \\ Z_1-Z_2 & 2(Z_1+Z_2) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2(Y_1+Y_2) & Y_1-Y_2 \\ Y_1-Y_2 & (Y_1+Y_2)/2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \Gamma_1+\Gamma_2 & \Gamma_1-\Gamma_2 \\ \Gamma_1-\Gamma_2 & \Gamma_1+\Gamma_2 \end{bmatrix}$
理想トランス 	無	無	$\begin{bmatrix} 2n & 1-n^2 \\ 1+n^2 & -2n \end{bmatrix}$

ただし、各ポートの基準インピーダンスは全て同一で、 Z_0 とする。 $G(x) = (x - Z_0)/(x + Z_0)$ という関数とした。そして、 $\Gamma_1 = G(Z_1), \Gamma_2 = G(Z_2)$ と略記した。

表9 モード変換した2ポート行列の例

series-thru, shunt-thruは対称性が良いので、 Z, Y, S が対角行列になる。従って、C/Dモードを別々に考えることができる。series-thruでは、 $Y_{cc} = 0, S_{cc} = 1$ である。これは、Cモードに対してopenになっていることを示している。また、Dモードに対しては2端子インピーダンス Z の素子として振舞う。shunt-thruはそれと双対で、Dモードに対してshort($Z_{dd} = 0, S_{dd} = -1$)Cモードに対して2端子インピーダンス Z の素子とみなすことができる。それらは二等分定理を使っても考察できる。

対称性のある回路では、 Z_{cc} は対称面をopen、 Z_{dd} はshort(共通帰線の場合は接地)した1ポート部品のインピーダンスとして求められる(図46、47)。C/Dモードに換算するには、 $Z_{cc} = Z_{cc}/2, Z_{dd} = 2Z_{dd}$ とすればよい((7.68)(7.69)式参照)。それは図40(b), 41(b)の形からも理解できる(この場合は対称なので、 Z_{cc}, Z_{dd} の代わりに、 Z_u, Z_b で考えても構わない)。

一方、shunt to GNDは $Z_1 = Z_2$ の場合を除き、非対角要素もゼロではない。非対角要素は、CモードからDモード(あるいはその逆、相反性があるので両者は同じ値になる)への転換度合いを示しており、対称性の悪さの指標となる(比較:この場合、対称度は、 $= Z_1/Z_2$ である) shunt to GNDの Y_u, Z_b, Y_t を求めてみる。図40(b), 41(b), 45を適用すると、それらは図48~50のように描くことができる。従って、 $Y_u = Y_1 + Y_2, Z_b = Z_1 + Z_2, Y_t = (Y_1 + Y_2)/4$ となる。このことは(7.83)(7.84)(7.90)式からも確認できる。そして、対称($Z_1 = Z_2$)でなければ、 $Z_u = Z_{cc}, Y_b = Y_{dd}, Z_t = Z_{dd}$ とはならない。

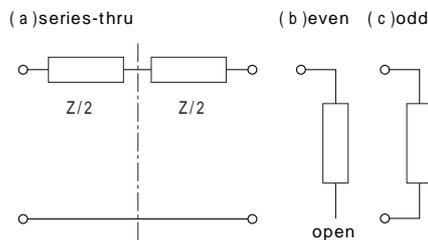


図46 series-thruに二等分定理を適用する

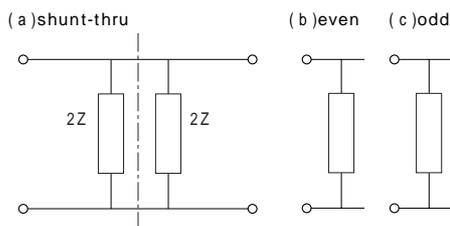


図47 shunt-thruに二等分定理を適用する

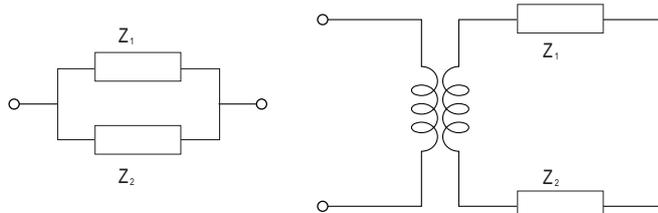


図48 shunt to GNDの Y_u

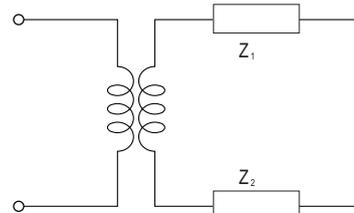


図49 shunt to GNDの Z_b

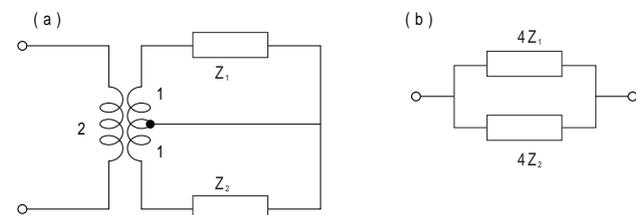


図50 shunt to GNDの Y_t

理想トランスは無損失相反回路なので、 S も元のS行列同様、対称直交行列になる。巻数比が等しい場合($|n| = 1$)理想トランスは左右対称である。そのとき S は、

$$S = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{bmatrix} \quad (7.93)$$

となる。複合は n の正負に対応している。 $n = 1$ の理想トランスはCモードに対してはopen、Dモードに対してはshortとして作用する。

今回は「モード変換」の続きである。

APPENDIX

固有値と対角化についてのコメント。

(1) 2つの正方行列、AとBが可換で、かつAが対角化可能であれば、BはAの固有ベクトルでブロック対角化される。特にAの固有値が縮重していないときは、Bは対角化される。証明⁽²¹⁾: Aは対角化可能であるから、ベクトル空間はAの固有空間の直和に分解される。その一つの固有空間(固有値 λ)の元をxとすると、

$$ABx = BAx = (\lambda B)x$$

であるから、Bxもまた固有空間の元となる。すなわちその固有空間はBの不変部分空間にもなっている。従って、直和分解に則して基底を取れば、Bはブロック対角化される。証明終。

(2) 正方行列Aの固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とすると、Aのスペクトル上で定義された関数、 $f(A)$ の固有値は、 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$ となる⁽²²⁾。

APPENDIX

巻数比nの理想トランスのS行列は、両ポートの基準インピーダンスが等しい(それを Z_0 とする)とき、

$$S_{1:n} = \frac{1}{1+n^2} \begin{bmatrix} 1-n^2 & 2n \\ 2n & n^2-1 \end{bmatrix} \quad (A \cdot V \cdot 1)$$

と表される(4・16式)。通常このnは実数であるが、もし複素数であったならば、どうなるのであろうか。ここではそれを考察する。以下ではnを複素数として扱うので注意。

nが複素数だとすると、 $S_{1:n}$ はもはやUnitary行列ではない。従って、一般には何らかの損失成分を含むことが予想される。しかし対称行列であることには変わりないので、相反性は維持している。

与えられた(単一周波数の)S行列を抵抗($\pm R$)、リアクタンス(X)、理想トランス(IT)、理想ジャイレータ(IG)の組み合わせで表現すると、表10のように分類される^(19,23)。 $S_{1:n}$ はこの表で言えば、任意対称行列に該当するので、理想トランスとリアクタンス、正負抵抗で構成できるはずである。

		S	IT	IG	$\pm R$	X
対称	対称直交					
	実対称		A ₁			
	対称 Unitary		A ₂			
	任意対称		A ₃			
非対称	非対称直交		B ₁			
	実非対称					
	非対称 Unitary		B ₂			
	任意非対称		B ₃			

ITはIGを用いて作る事ができる。従って、非対称の場合、ITはあえて必要ではない。例えば、非対称直交であれば、「IGのみで構成できる」と言ってもよい。

表10 与えられたS行列の合成

実際に合成してみる。まず $S_{1:n}$ を特異値分解する⁽²⁴⁾。対称行列であるから、 $S_{1:n} = UDU^T$ の形にすることができる。ただし、UはUnitary行列、Dは特異値を対角要素にもつ対角行列である。この場合は、

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} + & +/j \\ \cdot & \cdot /j \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} |D_+| & 0 \\ 0 & |D_-| \end{bmatrix} \quad (A \cdot V \cdot 2)$$

となる。ただし、

$$D_{\pm} = \frac{(1 \pm jn)^2}{1+n^2} \quad \pm = \exp\left(j \frac{\arg D_{\pm}}{2}\right) \quad (A \cdot V \cdot 3)$$

である(\pm は自乗でしか効かないので負号をつけてもよい。 \pm も許すということ)。従って、 $S_{1:n}$ は反射係数が $|D_{\pm}|$ の抵抗とS行列が、

$$S_M = \begin{bmatrix} 0 & U \\ U & 0 \end{bmatrix} \quad (A \cdot V \cdot 4)$$

の無損失回路の組み合わせで実現できる。 S_M は対称Unitary行列だから、理想トランス+リアクタンス(あるいは理想トランス+無損失伝送線路、4・2節(1)参照)で構成できる。実際、簡単な計算により、 S_M は(7・59)式のマジックTに

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & j & & \\ & & 1/ + & \\ & & & 1/ \cdot \end{bmatrix} \quad (A \cdot V \cdot 5)$$

という基準面の移動をしたものであることがわかる。基準面の移動は、ポート2~4に、

$$j \Rightarrow \frac{1}{2} = \cdot / 2 \quad (A \cdot V \cdot 6)$$

$$1/ \pm \Rightarrow \frac{\pm}{2} = \frac{\arg D_{\pm}}{2} \quad (A \cdot V \cdot 7)$$

だけ位相を回転させる伝送線路を挿入したと同じである(3・4節参照)。以上を総合すると、複素数巻数比の理想トランスは、図51のようなものとみなすことができる。伝送線路は同等の作

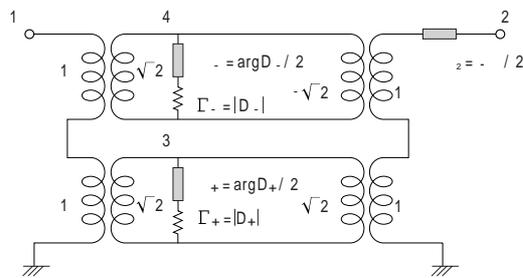


図51 複素数巻数比の理想トランスの合成(1)

用するリアクタンスに置き換えることも可能である。一般に無損失伝送線路の規格化Z行列は、

$$\hat{Z} = \frac{1}{j} \begin{bmatrix} \cot & 1/\sin \\ 1/\sin & \cot \end{bmatrix} \quad (A \cdot V \cdot 8)$$

となる((4・2)式、 $\cot = kx$)ので、単一周波数では図52のような格子型(a)やT型(b)などの等価回路で表わすことができる(その他の形も可。図35参照)。ポート2の場合は、それらに $1/2$ を代入すればよい。ポート3,4は、 \pm の伝送線路の先を反射係数が $|D_{\pm}|$ の抵抗で終端したものであるから、全体では、

$$\Gamma_3 = |D_+| / \cdot^2 \quad \Gamma_4 = |D_-| / \cdot^2 \quad (A \cdot V \cdot 9)$$

という反射係数((6・15)式参照)の素子を付けたことになる。従って、図51で $1/2$ の伝送線路を除いた部分は、 $\Gamma_3 = (\hat{Z}_3 - 1) / (\hat{Z}_3 + 1)$ 、 $\Gamma_4 = (\hat{Z}_4 - 1) / (\hat{Z}_4 + 1)$ をトランスの2次側に移して、

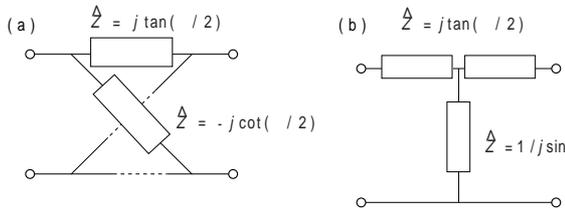


図52 伝送線路の単一周波数での等価回路

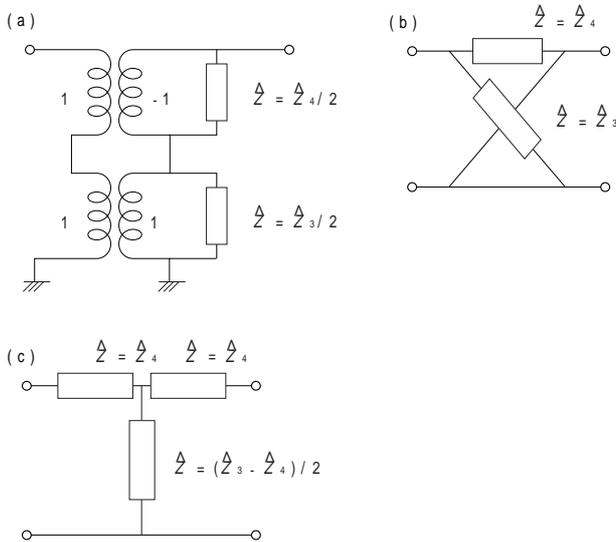


図53 Riegger回路の変形

図53(a)のように描くことができる。これはRiegger回路であるから、格子型(b)やT型(c)回路に変換できる(さらに別な等価回路にも変換可能である。図35参照)結局全体では図52と図53を組み合わせて、例えば、図54のようになる。

nが実数の場合は、

$$|D_{\pm}| = 1 \text{ (すなわちopen)} \quad \pm = (1 \pm jn) / \sqrt{1 + n^2}$$

となる。このとき、

$$Z_3 = 1/jn \quad Z_4 = j/n \quad (\text{A}\cdot\text{V}\cdot 10)$$

であるから、図54は図55のように描ける。このF行列を計算すると、無事(4.13)式、

$$F_{1:n} = \begin{bmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \quad (\text{A}\cdot\text{V}\cdot 11)$$

に一致する。図52～図55の中では、インピーダンスを規格化して示しているが、実際には Z_0 倍する必要がある(5-1節2)も参照)。 Z_0 倍しても(A・V・11)式は変わらない。また全てのインピーダンスの符号を反転しても構わない。なおこれらの等価回路(格子型を除く)は共通帰線であることを前提としているが、もしそうでないならば、1:1の理想トランスを追加挿入する必要がある。

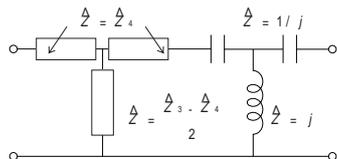


図54 複素数巻数比の理想トランスの合成(2)

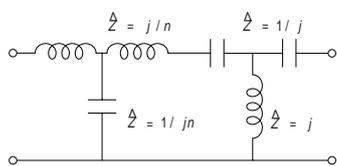


図55 理想トランスの合成(n > 0のときの図記号で示した)

次にF行列が、

$$F = \begin{bmatrix} 1/n^* & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \quad (\text{A}\cdot\text{V}\cdot 12)$$

となる素子を考察する。これも理想トランスを複素化したものと捉えることができる。このF行列は、(A・V・11)式に似ているが、「複素電力を保存する」という点で根本的に異なる。このときS行列は、

$$S = \frac{1}{1 + |n|^2} \begin{bmatrix} 1 - |n|^2 & 2n \\ 2n^* & |n|^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A}\cdot\text{V}\cdot 13)$$

となる。このS行列は、Unitary行列(無損失)であるが、対称行列(相反)ではない。表10によれば、非対称Unitary行列は、理想ジヤイレータ(理想トランス)リアクタンスで構成できる。その具体的な表記は文献⁽²⁵⁾を参照のこと。

(15) 多導体線路のモード分解については、以下の文献や本も参照。

ただし本章で扱う多導体線路はS行列の定義用であるため、結合のない多導体線路となっており、少々様子が異なる。
L.M.Wedepohl, "Application of matrix methods to the solution of travelling-wave phenomena in polyphase system", Proc. IEE, vol. 110(12), pp2200-2212, 1963

C.R.Paul, 「EMC概論」, ミマツデータシステム, 1996

Rajesh Mongia, Inder Bahl, Prakash Bhartia, "RF and Microwave Coupled-Line Circuits", Artech House, 1999

羽鳥孝三「基礎電気回路(2)」, コロナ社, 1985

雨谷昭弘「分布定数回路論」, コロナ社, 1990

小西良弘「マイクロ波回路の構成法」, 総合電子出版, 1993

これより古い文献は、これらの本の引用文献を参照のこと。

(16) モード変換と変換回路に関するその他の文献。

W.Klein(小林夏雄, 塚本昭慶訳), 「回路網の基礎理論」, コロナ社, 1965

W.K.Kahn, "Scattering Equivalent Circuits for Common Symmetrical Junctions", IRE Trans. on Circuit Theory, vol. CT-3, pp121-127, 1956 Jun.

(17) 細野敏夫「線形ブラックボックスの基礎」, コロナ社, 1980

(18) 大野克郎, 安浦亀之助「S行列による多端子網構成理論」, 電気通信学会誌, vol. 36, No. 10, pp564-570, 1953, あるいは大野克郎, 「回路網の古典合成論III」, 電子通信学会誌 vol. 58, No.1, pp31-37, 1975

(19) D.C.Youla, "Direct Single frequency Synthesis from a prescribed Scattering Matrix", IRE Trans. CT-6, pp340-344, 1959

(20) 佐藤利三郎「伝送回路」, コロナ社, 1963

(21) 佐竹一郎「線型代数学」, 裳華房, 1958

(22) 千葉克裕「行列の関数とジョルダン標準形」, サイエンス社, 1998

(23) 荒木純道「Sパラメータに基づく電磁波回路の解析と設計」, MWE '97 Digest, 1997

(24) 特異値分解については、以下の本を参照のこと。

小山昭雄,「経済数学教室」,岩波書店,1994

柳井晴夫,竹内啓,「射影行列・一般逆行列・特異値分解」,東京
大学出版会,1983

- (25) H.J.Carlin, “ On the Physical Realizability of Linear
Non-Reciprocal Networks ”, Proc. IRE, vol. 43,
pp608-616, 1955 May



モード変換 (続)

電子部品事業本部
藤城 義和

今回はモード変換の後編である。まず2入力、2出力型の4ポート回路のモード変換が、前号で述べた2ポート回路の場合とまったく同じ形式で進められることを確認する。そしてその結果を実際の部品 (CMCC) に適用し、モード変換による評価が有効的に使われている様子を示す。またモード変換の応用として、簡単な回路の4ポート回路行列を導出する。最後にまとめとして、各種モード変換やモード変換で得られるパラメータの比較を通じて、あらためてモード変換の意味を考える。

7-7 2束ポート回路行列

4ポート回路のモード変換を論ずる前に、2束ポート回路行列を導入する。一般に多ポート回路を解析する場合、ポートが入力側と出力側など、2つのグループに分けられるならば、それらを束にして考えると、あたかも2ポート回路のように扱えて便利である (図56)

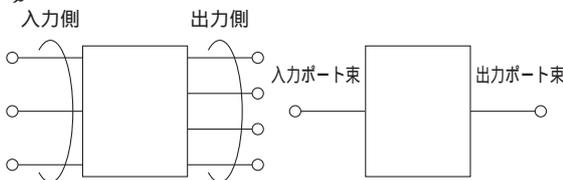


図56 3+4ポート回路を2束回路として扱う

そのようにグループ分けしたものをここでは「2束ポート回路」と呼ぼう。2束ポート回路行列は数学的には行列の区分けに相当する。例えば、次のような4ポートのS行列を2+2に分割するときは、

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (7.94)$$

点線で区別して、

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (7.95)$$

と表わす。ここで、

$$b_1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad a_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (7.96)$$

$$S_{11} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad S_{12} = \begin{bmatrix} S_{13} & S_{14} \\ S_{23} & S_{24} \end{bmatrix} \quad S_{21} = \begin{bmatrix} S_{31} & S_{32} \\ S_{41} & S_{42} \end{bmatrix} \quad S_{22} = \begin{bmatrix} S_{33} & S_{34} \\ S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \quad (7.97)$$

である。他の回路行列も同様の記法で書く。このような手法は、4-2節 (2) で既に導入していたが、ここであらためて整理し直してみよう。

各種2束ポート回路行列の相互関係は表11のように書ける。ただし、F,T行列は対称区分け (2nポート回路をnポートずつ束にする) している場合のみ有効である。この表は表1を拡張したもの

とみなすことができる。実際、2ポートの場合は小行列がスカラーになるので、表11は表1に還元される。区分けされた行列の逆行列は、APPENDIX の公式を参照。また各回路行列の行列式は以下のような関係がある。

$$\begin{aligned} |Z| &= |\hat{Z}| |Z_0| = 1/|Y| = 1/|\hat{Y}| |Y_0| \\ &= |B|/|C| = |Z_{11}|/|Y_{22}| = |Z_{22}|/|Y_{11}| = |Z_{21}|/| -Y_{21}| = |Z_{12}|/| -Y_{12}| \end{aligned} \quad (7.98)$$

$$|\hat{Z}| = 1/|\hat{Y}| = |I+S|/|I-S| \quad (7.99)$$

$$|F| = |\hat{F}| = |T| = |Z_{12}|/|Z_{21}| = |Y_{12}|/|Y_{21}| = |S_{12}|/|S_{21}| \quad (7.100)$$

$$|S| = \begin{bmatrix} | \cdot T_{11} | & |\hat{Z} \cdot I| \\ | T_{22} | & | I \cdot \hat{Y} | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | \cdot \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \cdot \hat{D} | \\ | \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} | \end{bmatrix} \quad (7.101)$$

これらの式は2ポートの場合にも当てはまる ((3・14) ~ (3・17) 式参照。スカラーの行列式は行列式の記号をはずせる)

さて、次に回路の接続について考えよう。2つの回路を縦続接続する場合、F行列やT行列で計算するのがわかりやすい (図57, T行列の場合は接続するポートが同じ基準インピーダンスになっていなければならないことに注意)。しかし、Z,Y,S行列を扱うのであれば、それらから直接求めた方が便利なときもある。ここでは、S行列とY行列から求める公式を導入する^(9,12)。

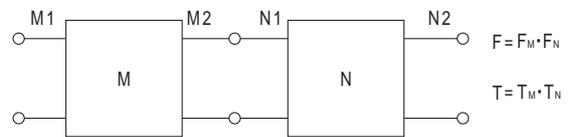


図57 回路行列の縦続接続

(1) 縦続接続したS行列

回路M,NのS行列を、4分割に区分けされた形で、

$$\begin{bmatrix} b_{M1} \\ b_{M2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{M11} & S_{M12} \\ S_{M21} & S_{M22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{M1} \\ a_{M2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_{N1} \\ b_{N2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{N11} & S_{N12} \\ S_{N21} & S_{N22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{N1} \\ a_{N2} \end{bmatrix} \quad (7.102)$$

と表わす。この場合も、接続するポート (内部ポート M2, N1) のポート数とその基準インピーダンスは2つのS行列で等しいとする。この2式をまとめて、

	Z	Y	F	S	T
Z=	$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$	Y^{-1}	$\begin{bmatrix} AC^{-1} & AC^{-1}D - B \\ C^{-1} & C^{-1}D \end{bmatrix}$	$\hat{Z} = \begin{bmatrix} I + S \\ I - S \end{bmatrix}$	
Y=	Z^{-1}	$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} DB^{-1} & C - DB^{-1}A \\ -B^{-1} & B^{-1}A \end{bmatrix}$	$\hat{Y} = \begin{bmatrix} I - S \\ I + S \end{bmatrix}$	
F=	$\begin{bmatrix} Z_{11}Z_{21}^{-1} & Z_{11}Z_{21}^{-1}Z_{22} - Z_{12} \\ Z_{21}^{-1} & Z_{21}^{-1}Z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Y_{21}^{-1}Y_{22} & Y_{21}^{-1} \\ Y_{11}Y_{21}^{-1}Y_{22} - Y_{12} & Y_{11}Y_{21}^{-1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$		
S=	$\begin{bmatrix} \hat{Z} - I \\ \hat{Z} + I \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} I - \hat{Y} \\ I + \hat{Y} \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} T_{12}T_{22}^{-1} & T_{11} - T_{12}T_{22}^{-1}T_{21} \\ T_{22}^{-1} & -T_{22}^{-1}T_{21} \end{bmatrix}$
T=				$\begin{bmatrix} S_{12} - S_{11}S_{21}^{-1}S_{22} & S_{11}S_{21}^{-1} \\ -S_{21}^{-1}S_{22} & S_{21}^{-1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$

ここで、I は単位行列

$$\hat{F} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (I + S_{11})S_{21}^{-1}(I - S_{22}) + S_{12} & (I + S_{11})S_{21}^{-1}(I + S_{22}) - S_{12} \\ (I - S_{11})S_{21}^{-1}(I - S_{22}) - S_{12} & (I - S_{11})S_{21}^{-1}(I + S_{22}) + S_{12} \end{bmatrix}$$

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} I & I \\ -I & I \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} I & I \\ -I & I \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} T_{11} + T_{12} + T_{21} + T_{22} & -T_{11} + T_{12} - T_{21} + T_{22} \\ -T_{11} - T_{12} + T_{21} + T_{22} & T_{11} - T_{12} - T_{21} + T_{22} \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} [(\hat{A} + \hat{B})^{-1} + (\hat{C} + \hat{D})^{-1}]^{-1} [- (\hat{A} + \hat{B})^{-1} + (\hat{C} + \hat{D})^{-1}] & [(\hat{A} + \hat{B})^{-1} + (\hat{C} + \hat{D})^{-1}]^{-1} [(\hat{A} + \hat{B})^{-1} (\hat{A} - \hat{B}) - (\hat{C} + \hat{D})^{-1} (\hat{C} - \hat{D})] \\ 2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D})^{-1} & (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D})^{-1} (-\hat{A} + \hat{B} - \hat{C} + \hat{D}) \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} I & I \\ -I & I \end{bmatrix}^{-1} \hat{F} \begin{bmatrix} I & I \\ -I & I \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{A} - \hat{B} - \hat{C} + \hat{D} & \hat{A} + \hat{B} - \hat{C} - \hat{D} \\ \hat{A} - \hat{B} + \hat{C} - \hat{D} & \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} \hat{Z}_{1m} - I & 2(\hat{Z}_{11} + I)^{-1} \hat{Z}_{12} \\ 2(\hat{Z}_{22} + I)^{-1} \hat{Z}_{21} & \hat{Z}_{2m} - I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Z}_{1m} + I & 0 \\ 0 & \hat{Z}_{2m} + I \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\hat{Z}_{1m} = \hat{Z}_{11} - \hat{Z}_{12}(\hat{Z}_{22} + I)^{-1} \hat{Z}_{21}$$

$$\hat{Z}_{2m} = \hat{Z}_{22} - \hat{Z}_{21}(\hat{Z}_{11} + I)^{-1} \hat{Z}_{12}$$

$$S = \begin{bmatrix} I - \hat{Y}_{1m} & -2(I + \hat{Y}_{11})^{-1} \hat{Y}_{12} \\ -2(I + \hat{Y}_{22})^{-1} \hat{Y}_{21} & I - \hat{Y}_{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I + \hat{Y}_{1m} & 0 \\ 0 & I + \hat{Y}_{2m} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\hat{Y}_{1m} = \hat{Y}_{11} - \hat{Y}_{12}(I + \hat{Y}_{22})^{-1} \hat{Y}_{21}$$

$$\hat{Y}_{2m} = \hat{Y}_{22} - \hat{Y}_{21}(I + \hat{Y}_{11})^{-1} \hat{Y}_{12}$$

$$\hat{Z} = \begin{bmatrix} I + S_{10} & 2(I - S_{11})^{-1} S_{12} \\ 2(I - S_{22})^{-1} S_{21} & I + S_{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - S_{10} & 0 \\ 0 & I - S_{20} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$S_{10} = S_{11} + S_{12}(I - S_{22})^{-1} S_{21}$$

$$S_{20} = S_{22} + S_{21}(I - S_{11})^{-1} S_{12}$$

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} I - S_{1s} & -2(I + S_{11})^{-1} S_{12} \\ -2(I + S_{22})^{-1} S_{21} & I - S_{2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I + S_{1s} & 0 \\ 0 & I + S_{2s} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$S_{1s} = S_{11} - S_{12}(I + S_{22})^{-1} S_{21}$$

$$S_{2s} = S_{22} - S_{21}(I + S_{11})^{-1} S_{12}$$

表 11 2束ポート回路行列の相互変換

$$\begin{bmatrix} b_{M1} \\ b_{M2} \\ b_{N1} \\ b_{N2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{M11} & S_{M12} & 0 & 0 \\ S_{M21} & S_{M22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{N11} & S_{N12} \\ 0 & 0 & S_{N21} & S_{N22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{M1} \\ a_{M2} \\ a_{N1} \\ a_{N2} \end{bmatrix} \quad (7.103)$$

と書く。最終的に欲しいのは、外部ポートM1,N2間の特性であるから、計算に便利に行と列を入れ替える。

$$\begin{bmatrix} b_{M1} \\ b_{N2} \\ b_{M2} \\ b_{N1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{M11} & 0 & S_{M12} & 0 \\ 0 & S_{N22} & 0 & S_{N21} \\ S_{M21} & 0 & S_{M22} & 0 \\ 0 & S_{N12} & 0 & S_{N11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{M1} \\ a_{N2} \\ a_{M2} \\ a_{N1} \end{bmatrix} \quad (7.104)$$

これを点線で区画したように、内部ポートと外部ポートに分け、

$$\begin{bmatrix} b_e \\ b_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ee} & S_{ei} \\ S_{ie} & S_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_e \\ a_i \end{bmatrix} \quad (7.105)$$

と表わす。あるいは、ばらして、

$$b_e = S_{ee}a_e + S_{ei}a_i \quad (7.106)$$

$$b_i = S_{ie}a_e + S_{ii}a_i \quad (7.107)$$

と書く。ここで、脚符「i」は内部を、「e」は外部を示す。内部ポートは接続されてるので、

$$a_{M2} = b_{N1} \quad b_{M2} = a_{N1} \quad (7.108)$$

という関係が成り立っている。この接続条件は、上の記号を用いると、

$$b_i = -a_i \quad (7.109)$$

と表わせる。ただし、 x は、

$$x = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (7.110)$$

である。(7.109)式を加味して(7.107)式を a_i について解けば、

$$a_i = (x - S_{ii})^{-1} S_{ie} a_e \quad (7.111)$$

となる。これを(7.106)式に代入すると、

$$S = S_{ee} + S_{ei} (x - S_{ii})^{-1} S_{ie} \quad (7.112)$$

あるいは、具体的に書いて、

$$S = \begin{bmatrix} S_{M11} & 0 \\ 0 & S_{N22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{M12} & 0 \\ 0 & S_{N21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_{M22} & I \\ I & -S_{N11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{M21} & 0 \\ 0 & S_{N12} \end{bmatrix} \quad (7.113)$$

と所望のS行列が得られる。さらに計算を進めると、

$$S = \begin{bmatrix} S_{M11} + S_{M12}(S_{N11}^{-1} - S_{M22})^{-1} S_{M21} & S_{M12}(I - S_{N11} S_{M22})^{-1} S_{N12} \\ S_{N21}(I - S_{M22} S_{N11})^{-1} S_{M21} & S_{N22} + S_{N21}(S_{N22}^{-1} - S_{N11})^{-1} S_{N12} \end{bmatrix} \quad (7.114)$$

となる。

ここで、特殊な場合として、回路NにポートN2が無い状態を考える。それはすなわち、回路Mを S_{N11} で終端したことになる(図58)

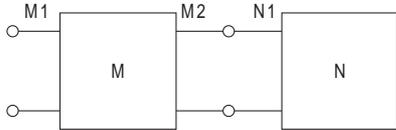


図58 回路Mを回路Nで終端する

その場合の、M1での反射係数(S行列)は、(7.114)式の1,1ブロックなので、

$$S = S_{M11} + S_{M12}(S_{N11}^{-1} - S_{M22})^{-1} S_{M21} \quad (7.115)$$

である。あるいはこれを変形して、

$$S = S_{M11} + S_{M12}(I - S_{N11} S_{M22})^{-1} S_{N11} S_{M21} = S_{M11} + S_{M12} S_{N11}(I - S_{M22} S_{N11})^{-1} S_{M21} \quad (7.116)$$

と書いてもよい。この式は(4.42)式や(7.35)式を一般化したものと捉えることができる。

(2) 縦続接続したY行列

回路M,NのY行列を、4分割に区分けされた形で、

$$\begin{bmatrix} i_{M1} \\ i_{M2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{M11} & Y_{M12} \\ Y_{M21} & Y_{M22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{M1} \\ v_{M2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i_{N1} \\ i_{N2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{N11} & Y_{N12} \\ Y_{N21} & Y_{N22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{N1} \\ v_{N2} \end{bmatrix} \quad (7.117)$$

と表わす。縦続接続された全体の回路を3束ポート回路と考え、図59のように番号をふると、(7.117)式は、

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{M11} & 0 & Y_{M12} \\ 0 & 0 & 0 \\ Y_{M21} & 0 & Y_{M22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{N22} & Y_{N21} \\ 0 & Y_{N12} & Y_{N11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (7.118)$$

と書くことができる。

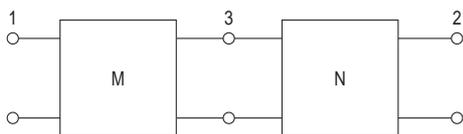


図59 縦続接続された回路を3束ポート回路とみなす

図59の回路はこの2つのY行列の並列接続と考えることができるので、全体のY行列は、その和で与えられる。

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{M11} & 0 & Y_{M12} \\ 0 & Y_{N22} & Y_{N21} \\ Y_{M21} & Y_{N12} & Y_{M22} + Y_{N11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (7.119)$$

これを点線で区画したように、内部ポート「3」と外部ポート「e」に分け、

$$\begin{bmatrix} i_e \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{ee} & Y_{e3} \\ Y_{3e} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_e \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (7.120)$$

と表わす。最終的に求めたいのは、 $i_3=0$ のときの $i_e=Y v_e$ である。そこで、(7.120)式をZ行列の形に直して、

$$\begin{bmatrix} v_e \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{ee} & Z_{e3} \\ Z_{3e} & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e \\ i_3 \end{bmatrix} \quad (7.121)$$

と表わせば、 $Y=Z_{ee}^{-1}$ として求まる。(A・8)式を使い、計算を進めれば、

$$Y = Z_{ee}^{-1} = Y_{ee} - Y_{e3} Y_{33}^{-1} Y_{3e} \quad (7.122)$$

が得られる。具体的に書けば、

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{M11} - Y_{M12}(Y_{N11} + Y_{M22})^{-1} Y_{M21} & -Y_{M12}(Y_{N11} + Y_{M22})^{-1} Y_{N12} \\ -Y_{N21}(Y_{N11} + Y_{M22})^{-1} Y_{M21} & Y_{N22} - Y_{N21}(Y_{N11} + Y_{M22})^{-1} Y_{N12} \end{bmatrix} \quad (7.123)$$

である。

ここで、特殊な場合として、回路NにポートN2が無い状態を考える(図58)。それはすなわち、回路Mを $Y_{N11}=Z_{N11}^{-1}$ で終端したことになる。その場合の入力アドミタンス(Y行列)は、(7.123)式の1,1ブロックなので、

$$Y = Y_{M11} - Y_{M12}(Y_{N11} + Y_{M22})^{-1} Y_{M21} \quad (7.124)$$

となる。

以上、2束ポート回路行列に関していくつかの公式を示したが、実際の計算では逆行列が存在しないため、それらを適用できない場合もある。そのときは原点に立ち返り、計算すればよい。

7-8 4ポート回路のモード変換

ここでは、トランスやコモンモードチョークコイル(以下CMCC) 2導体伝送線路のような2入力、2出力型の4ポート回路(図60, 帰線は共通と

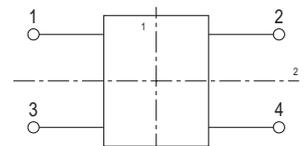


図60 2入力、2出力型の4ポート部品

を考察する。前節で書いたように、そのような4ポート回路は、ポートを入力側(ポート1,3)と出力側(ポート2,4)の2つにグループ分けして考えると便利である。

そして、以下では両グループに、同じモード変換を施す場合を想定する。すなわち、

$$V_{13} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad V_{24} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \end{bmatrix}, \quad i_{13} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \end{bmatrix}, \quad i_{24} = \begin{bmatrix} i_2 \\ i_4 \end{bmatrix} \quad (7.125)$$

としたとき、

$$\begin{bmatrix} V_{13} \\ V_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{V2} & 0 \\ 0 & T_{V2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V'_{13} \\ V'_{24} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i_{13} \\ i_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{I2} & 0 \\ 0 & T_{I2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_{13} \\ i'_{24} \end{bmatrix} \quad (7.126)$$

と表わされるような変換を扱う。

(1) 偶奇(even/odd)モード

最初に、7-4節(1)で考察した偶奇(even/odd)モードを考える。各ポートグループの変換行列 T_{V2}, T_{I2} は、

$$T_{V2} = T_{I2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = Q \quad (7.127)$$

である。このとき、(7.126) 式を具体的に書くと、

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \\ V_2 \\ V_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{c1} \\ V_{d1} \\ V_{c2} \\ V_{d2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \\ i_2 \\ i_4 \end{bmatrix} \quad (7.128)$$

となる。計算の便宜上、ポート2、3を入れ換えて、

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{c1} \\ V_{c2} \\ V_{d1} \\ V_{d2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} \quad (7.129)$$

とする。この変換行列は、4分割に区分けすると、

$$T_V = T_I = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} | & | \\ | & | \\ | & | \\ | & | \end{bmatrix} \quad (7.130)$$

と書くことができる。こうして見ると、(7.129)(7.130) 式の変換は(7.39)(7.38) 式を拡張したものであることがわかる。従って、4ポート回路行列を(7.94)(7.95) 式のような2束ポート回路行列として扱えば、注意：今度はポート1、2とポート3、4を束にする と、モード変換は2ポートの場合と並行に議論が進められる。

そこで以下では結論だけを簡単に示す。even/oddモードに変換したZ,Y,S行列は、

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{cc} & Z_{cd} \\ Z_{dc} & Z_{dd} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Z_{11}+Z_{21}+Z_{12}+Z_{22} & Z_{11}+Z_{21}-Z_{12}-Z_{22} \\ Z_{11}-Z_{21}+Z_{12}-Z_{22} & Z_{11}-Z_{21}-Z_{12}+Z_{22} \end{bmatrix} \quad (7.131)$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{cc} & Y_{cd} \\ Y_{dc} & Y_{dd} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Y_{11}+Y_{21}+Y_{12}+Y_{22} & Y_{11}+Y_{21}-Y_{12}-Y_{22} \\ Y_{11}-Y_{21}+Y_{12}-Y_{22} & Y_{11}-Y_{21}-Y_{12}+Y_{22} \end{bmatrix} \quad (7.132)$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{cc} & S_{cd} \\ S_{dc} & S_{dd} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S_{11}+S_{21}+S_{12}+S_{22} & S_{11}+S_{21}-S_{12}-S_{22} \\ S_{11}-S_{21}+S_{12}-S_{22} & S_{11}-S_{21}-S_{12}+S_{22} \end{bmatrix} \quad (7.133)$$

となる((7.53)~(7.55) 式参照)。4次行列の形であらわに書けば、

$$S = \begin{bmatrix} S_{cc11} & S_{cc12} & S_{cd11} & S_{cd12} \\ S_{cc21} & S_{cc22} & S_{cd21} & S_{cd22} \\ S_{dc11} & S_{dc12} & S_{dd11} & S_{dd12} \\ S_{dc21} & S_{dc22} & S_{dd21} & S_{dd22} \end{bmatrix} \quad (7.134)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S_{11}+S_{31}+S_{13}+S_{33} & S_{12}+S_{32}+S_{14}+S_{34} & S_{11}+S_{31}-S_{13}-S_{33} & S_{12}+S_{32}-S_{14}-S_{34} \\ S_{21}+S_{41}+S_{23}+S_{43} & S_{22}+S_{42}+S_{24}+S_{44} & S_{21}+S_{41}-S_{23}-S_{43} & S_{22}+S_{42}-S_{24}-S_{44} \\ S_{11}-S_{31}+S_{13}-S_{33} & S_{12}-S_{32}+S_{14}-S_{34} & S_{11}-S_{31}+S_{13}+S_{33} & S_{12}-S_{32}-S_{14}+S_{34} \\ S_{21}-S_{41}+S_{23}-S_{43} & S_{22}-S_{42}+S_{24}-S_{44} & S_{21}-S_{41}-S_{23}+S_{43} & S_{22}-S_{42}-S_{24}+S_{44} \end{bmatrix}$$

である(代表としてS行列で示す)。ちなみにこれらの逆変換も2ポートの場合同様、同じ形式で表わされる。

モード変換しても回路行列の性質は引き継がれる。例えば相反な回路であれば、変換後のZ,Y,S行列も対称行列になる。(7.133) 式の記号で言えば、対角ブロック S_{cc}, S_{dd} は対称行列 (S_{cc}

$= S_{cc}, S_{dd} = S_{dd}$) になり、非対角ブロックは $S_{cd} = S_{dc}$ が成り立つ (Z,Y行列も同様)。

even/oddへのモード変換は、回路で表現すれば、例えば、図34(b)のハイブリッドトランスを使って図61のように描くことができる。

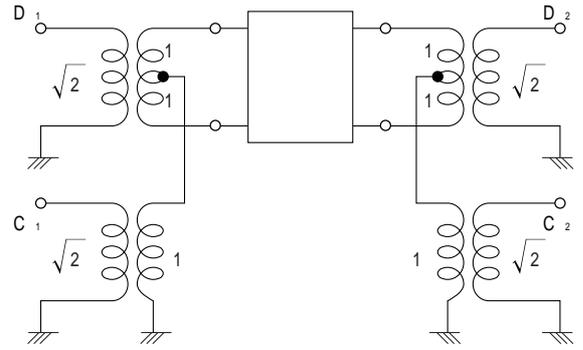


図61 4ポート回路のeven/oddモードへの変換

回路に図60の 2で表わしたような対称性(以下単に対称性と言え、2対称性を指す)がある場合、(4.31)(4.33) 式が成り立つので、Z,Y,S行列は、

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{cc} & 0 \\ 0 & Z_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}+Z_{21} & 0 \\ 0 & Z_{11}-Z_{21} \end{bmatrix} \quad (7.135)$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{cc} & 0 \\ 0 & Y_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}+Y_{21} & 0 \\ 0 & Y_{11}-Y_{21} \end{bmatrix} \quad (7.136)$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{cc} & 0 \\ 0 & S_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}+S_{21} & 0 \\ 0 & S_{11}-S_{21} \end{bmatrix} \quad (7.137)$$

とブロック対角化される。4次行列の形に書き下せば、

$$S = \begin{bmatrix} S_{11}+S_{31} & S_{12}+S_{32} & 0 & 0 \\ S_{21}+S_{41} & S_{22}+S_{42} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{11}-S_{31} & S_{12}-S_{32} \\ 0 & 0 & S_{21}-S_{41} & S_{22}-S_{42} \end{bmatrix} \quad (7.138)$$

である(代表としてS行列で示す)。完全な対角化とならないのは、 D_2 ((4.27) 式参照)の固有値が縮重していることに対応している (APPENDIX 参照)。

ブロック対角化されることにより、evenモードとoddモードが独立になるので取り扱いが容易になる。例えば、Z,Y,S行列間の関係は、even/oddモードで別々に

$$Z_{cc} \cdot Y_{cc} = I \quad Z_{dd} \cdot Y_{dd} = I \quad (7.139)$$

$$S_{cc} = \frac{Z_{cc} - I}{Z_{cc} + I} = \frac{I - \hat{Y}_{cc}}{I + \hat{Y}_{cc}} \quad S_{dd} = \frac{Z_{dd} - I}{Z_{dd} + I} = \frac{I - \hat{Y}_{dd}}{I + \hat{Y}_{dd}} \quad (7.140)$$

が成り立つ。

(2) common/differentialモード

次に、C /D モードへの変換、

$$T_{V2} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \quad T_{I2} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix} \quad (7.141)$$

を考える(7.4節(2)参照)。この場合の変換行列は、(7.130) 式の形式で書けば、

$$T_V = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \quad T_I = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix} \quad (7.142)$$

となる。従って、回路行列は

$$Z = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^{-1} Z \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Z_{cc}/2 & Z_{cd} \\ Z_{dc} & 2Z_{dd} \end{bmatrix} \quad (7.143)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} Y \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2Y_{cc} & Y_{cd} \\ Y_{dc} & Y_{dd}/2 \end{bmatrix} \quad (7.144)$$

と表わされる。S行列はeven/oddモードのときと同じである(S=S (7.133)式参照) ただし、その基準インピーダンスはCモードが $Z_o/2$ 、Dモードが $2Z_o$ であることに注意しなくてはならない。

この場合も対称性があれば、

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{cc} & 0 \\ 0 & Z_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{cc}/2 & 0 \\ 0 & 2Z_{dd} \end{bmatrix} \quad (7.145)$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{cc} & 0 \\ 0 & Y_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2Y_{cc} & 0 \\ 0 & Y_{dd}/2 \end{bmatrix} \quad (7.146)$$

とブロック対角化される(S行列は(7.137)(7.138)式と同じ) またその場合、

$$Z_{cc} \cdot Y_{cc} = 1 \quad Z_{dd} \cdot Y_{dd} = 1 \quad (7.147)$$

$$S_{cc} = S_{cc} = \frac{Z_{cc} - 1}{Z_{cc} + 1} = \frac{|Z_{cc}| - 1}{|Z_{cc}| + 1} \quad S_{dd} = S_{dd} = \frac{Z_{dd} - 1}{Z_{dd} + 1} = \frac{|Z_{dd}| - 1}{|Z_{dd}| + 1} \quad (7.148)$$

が成り立つ。C/Dモードへの変換を回路で表現すれば図62のようになる。

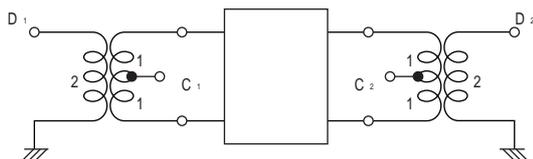


図62 4ポート回路のC/Dモードへの変換

C/Dモードについても同様に議論を進められるが、ここでは割愛する。

(3)具体例

図63にTDK製共通モードチョークコイル、ACM3225-102の S_{cc} 特性(a)、 S_{cd} 特性(b)、 S_{dc} 特性(c)、 S_{dd} 特性(d)を示す。 S_{dc} はcommonモードがdifferentialモードに転換する度合いを(ここではSパラメータについてだけ論ずるので、even/oddとC/D、C/Dを区別する必要がない。そこで、総称としてcommon/differentialという言葉を使う(7.12節参照))、 S_{cd} はdifferentialモードがcommonモードに転換する度合いを表わしているが、相反かつ1対称性(4.30)(4.32)式)がある場合、両者は一致する。この例でも実際(b)と(c)の形は似ている。そして、その大きさは図中の周波数帯で-80dB~-30dBとかなり小さくなっているが、それは2対称性が良いためcommon/differential間の転換がほとんど生じていないことを示している。また S_{dd21} はdifferentialモードの伝送特性を表わしているが、この例では数百MHzまでほとんど素通りであることがわかる。一方、commonモードに対しては、ピーズのような働きをする。すなわち低周波成分は通すが、ノイズの帯域である高周波成分は阻止する。

4ポート回路が無損失であれば、そのS行列はモード変換後もUnitary行列となる。従って、CMCCの電力損失は、

$$U_c = |S_{cc11}|^2 + |S_{cc21}|^2 + |S_{dc11}|^2 + |S_{dc21}|^2 \quad (7.149)$$

$$U_d = |S_{dd11}|^2 + |S_{dd21}|^2 + |S_{cd11}|^2 + |S_{cd21}|^2 \quad (7.150)$$

という量で評価できる(3.5節参照)。 U_c はcommonモードの、 U_d はdifferentialモードの電力損失を表わす。ACM3225-102の実測例(図63(a))ではcommonモードの減衰域で U_c が増加しており、図4(a)のピーズと同じ形になっていることがわかる。以上の知見を総合して考えれば、この部品はdifferentialモードに対しては何もせず、commonモードにだけ効く期待通りのcommonモードフィルタだと言える。

それに対して、ACT3225-102はdifferentialモードにも効果があるように、意識的に結合をゆるめた製品である(図64)。 S_{cc} 、 S_{cd} 、 S_{dc} 特性は前述のACM3225-102とほとんど変わらないが、 S_{dd} 特性は大きな減衰が得られている。

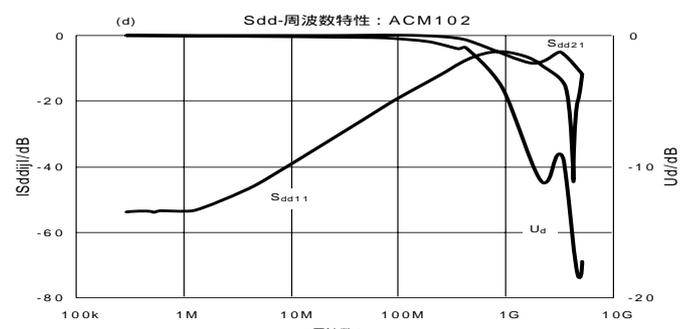
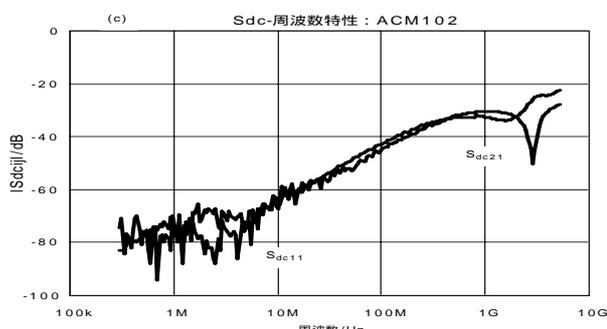
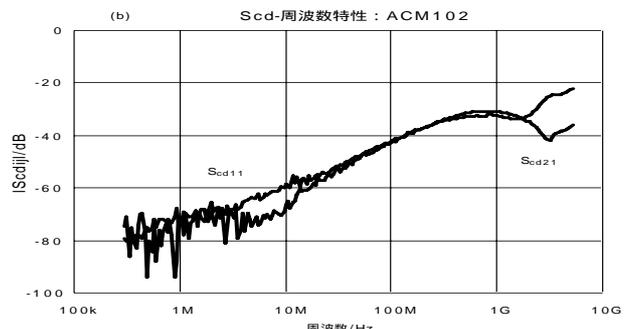
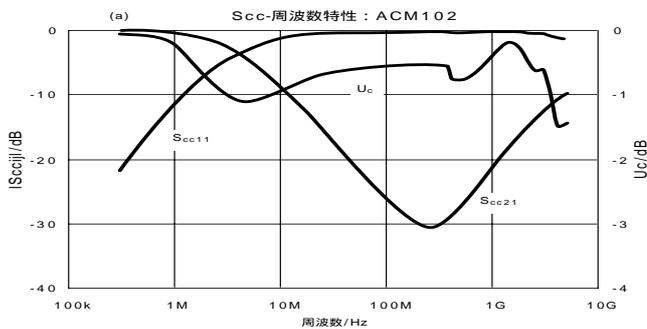


図63 ACM3225-102のSパラメータ

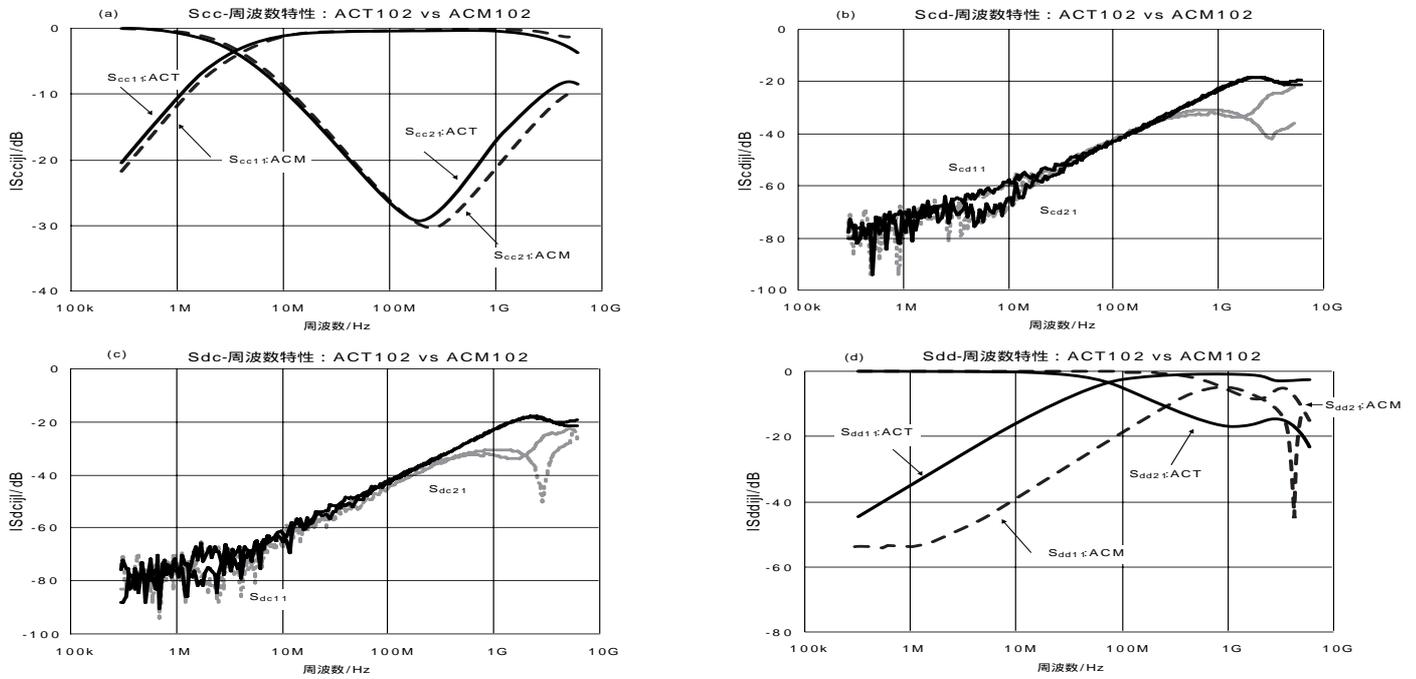


図64 ACT3225-102のSパラメータ(ACM3225-102と比較して)

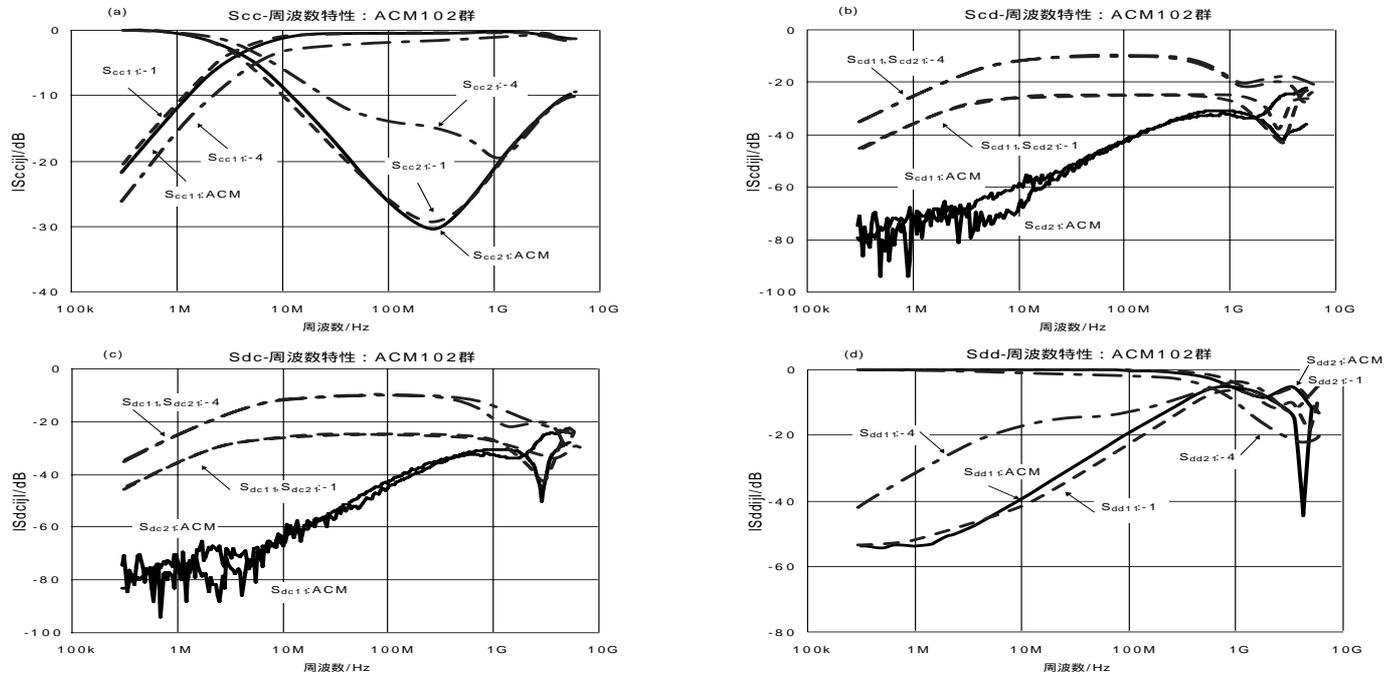


図65 対称性が悪いサンプルのSパラメータ

以上の2例は市販の製品ということもあり、対称性の良い部品であったが、もしそうでなければ特性はどう変わるのであろうか。ACM3225-102の片側の巻線をほどこ、わざと対称性をくずしたサンプルを作成した。測定結果を図65に示す。図中、「-1」は1巻き減らしたもの、「-4」は4巻き減らしたものを表わす。巻数を減らすほど対称性は悪くなるが、それに伴い、 S_{dc} 、 S_{cd} も大きくなっているのがわかる。

7-9 differentialな負荷を付けた4ポート回路

モード変換の活用例として、4ポート回路に図66のような負荷を付けたときの特性を考えてみる。

まず正攻法で計算する。負荷をseries-thruの2ポ

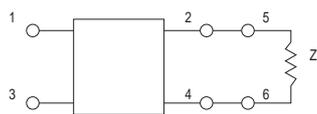


図66 負荷を付けた4ポート回路

ト回路とみなし、図のようにポート番号を振る。そして、ポート2、3を入れ換えた4ポートS行列

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_2 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{13} & S_{12} & S_{14} \\ S_{31} & S_{33} & S_{32} & S_{34} \\ S_{21} & S_{23} & S_{22} & S_{24} \\ S_{41} & S_{43} & S_{42} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (7.151)$$

に、series-thruの2ポート回路(表5参照)

$$S_{56} = \begin{bmatrix} S_{55} & S_{56} \\ S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} = \frac{1}{Z+2} \begin{bmatrix} Z & 2 \\ 2 & Z \end{bmatrix} \quad (7.152)$$

を縦続接続する。全体のS行列は(7.115)式より、

$$S_z = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{13} \\ S_{31} & S_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{21} & S_{24} \\ S_{41} & S_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z+2 & Z \\ Z & Z-2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{22} & S_{24} \\ S_{42} & S_{44} \end{bmatrix} \quad (7.153)$$

と求まる。

次にモード変換を利用して計算してみる。ここでは、簡単のため even/oddモードで考える。series-thruの2ポート回路は、7-6節で述べたように、evenモードに対してはopenで、oddモードに対しては、 $Z/2$ の素子と考えられる。従って、モード空間上では図66は図67のように表現できる。

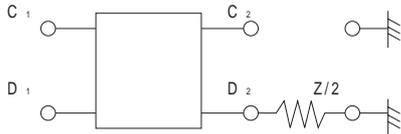


図67 負荷を付けた4ポート回路をモード変換する

4ポート回路をモード変換し、

$$\begin{bmatrix} b_{c1} \\ b_{d1} \\ b_{c2} \\ b_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{cc11} & S_{cd11} & S_{cc12} & S_{cd12} \\ S_{dc11} & S_{dd11} & S_{dc12} & S_{dd12} \\ S_{cc21} & S_{cd21} & S_{cc22} & S_{cd22} \\ S_{dc21} & S_{dd21} & S_{dc22} & S_{dd22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{c1} \\ a_{d1} \\ a_{c2} \\ a_{d2} \end{bmatrix} \quad (7 \cdot 154)$$

と区分けして((7・134)式参照。計算の便宜上 C_2 ポート、 D_1 ポートを入れ換えた)

$$S_{56} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Gamma_d \end{bmatrix} \quad (7 \cdot 155)$$

で終端すれば、所望のS行列が求まる。ただし、 $\Gamma_d = G(Z/2) / (Z - 2Z_0)$ ($Z + 2Z_0$)である。(7・115)式を適用して計算を進めると、

$$S_z = \begin{bmatrix} S_{cc11} & S_{cd11} \\ S_{dc11} & S_{dd11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{cc12} & S_{cd12} \\ S_{dc12} & S_{dd12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{cc22} - 1 & S_{cd22} \\ S_{dc22} & S_{dd22} - 1/\Gamma_d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{cc21} & S_{cd21} \\ S_{dc21} & S_{dd21} \end{bmatrix} \quad (7 \cdot 156)$$

が得られる。これは(7・153)式に一致する(ただし互いにモード変換したものになっている)

同様の考え方で、Y行列も求まる。

$$Y_z = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{13} \\ Y_{31} & Y_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_{12} & Y_{14} \\ Y_{32} & Y_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{22} + Y_{24} - Y_{23} - Y_{43} \\ Y_{42} - Y_{44} + Y_{43} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_{21} & Y_{23} \\ Y_{41} & Y_{43} \end{bmatrix} \quad (7 \cdot 157)$$

$$Y_z = \begin{bmatrix} Y_{cc11} & Y_{cd11} \\ Y_{dc11} & Y_{dd11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_{cc12} & Y_{cd12} \\ Y_{dc12} & Y_{dd12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{cc22} & Y_{cd22} \\ Y_{dc22} & Y_{dd22} + 2Y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_{cc21} & Y_{cd21} \\ Y_{dc21} & Y_{dd21} \end{bmatrix} \quad (7 \cdot 158)$$

4ポート回路に対称性があれば、 S_z, Y_z は簡単になる。

$$S_z = \begin{bmatrix} S_{cc11} + S_{cc12} S_{cc21} / (1 - S_{cc22}) & 0 \\ 0 & S_{dd11} + \Gamma_d S_{dd12} S_{dd21} / (1 - \Gamma_d S_{dd22}) \end{bmatrix} \quad (7 \cdot 159)$$

$$Y_z = \begin{bmatrix} 1/Z_{cc11} & 0 \\ 0 & Y_{dd11} - Y_{dd12} Y_{dd21} / (Y_{dd22} + 2Y) \end{bmatrix} \quad (7 \cdot 160)$$

これは各モードで別々に終端したものと捉えてよいことを表わしている。

7-10 4ポート回路の平衡・不平衡接続

(1) 2ポートパラメータ

次に7-5節(2)の考え方を4ポートに拡張しよう。すなわち図68~70のような2ポート回路を考察する。

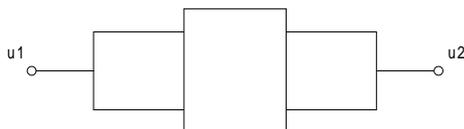


図68 不平衡接続 Y_u, S_u

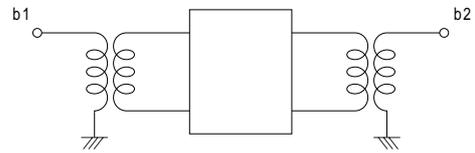


図69 平衡接続 Z_b, S_b

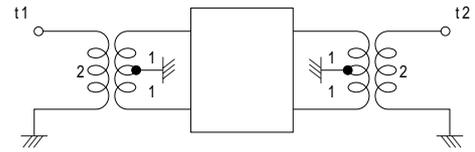


図70 Y_t, S_t

まず不平衡接続した2ポート回路(図68)のY、S行列を導く。4ポート回路をY行列で、

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} \quad (7 \cdot 161)$$

と表わしたとき、その接続条件は $V_1 = V_3 = V_{u1}$ 、 $V_2 = V_4 = V_{u2}$ そして、 $i_1 + i_3 = i_{u1}$ 、 $i_2 + i_4 = i_{u2}$ と書けるので、1行目と3行目、2行目と4行目をそれぞれ足して、

$$\begin{bmatrix} i_{u1} \\ i_{u2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} + Y_{13} + Y_{31} + Y_{33} & Y_{12} + Y_{14} + Y_{32} + Y_{34} \\ Y_{21} + Y_{23} + Y_{41} + Y_{43} & Y_{22} + Y_{24} + Y_{42} + Y_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{u1} \\ V_{u2} \end{bmatrix} \quad (7 \cdot 162)$$

が得られる。従って、

$$Y_u = Y_{cc} \quad (7 \cdot 163)$$

である。これは次のように考えてもよい。図68は図62の D_1 ポート、 D_2 ポートをshortしたものに相当するので、 Y_u はモード変換したY行列(7・144)式の1,1ブロックとなる。またS行列も同じように考えて、モード変換したS行列(7・133)式の2つのDポートを短絡終端、 $S_{N11} = -I$ すればよい。(7・116)式を適用して、

$$S_u = S_{cc} - S_{cd}(I + S_{dd})^{-1}S_{dc} \quad (7 \cdot 164)$$

と求まる。この式と(7・163)式が同等であることは、表11の公式で確認することができる。同様に、平衡接続の場合(図69)は、図62で2つのCポートをopenしたものであるから、

$$Z_b = Z_{dd} \quad (7 \cdot 165)$$

$$S_b = S_{dd} + S_{dc}(I - S_{cc})^{-1}S_{cd} \quad (7 \cdot 166)$$

となる。また図70は、図62の2つのCポートをshortしたものであるから、

$$Y_t = Y_{dd} \quad (7 \cdot 167)$$

$$S_t = S_{dd} - S_{dc}(I + S_{cc})^{-1}S_{cd} \quad (7 \cdot 168)$$

となる。これらの式は、(7・83)(7・84)(7・90)(7・85)(7・87)(7・91)式を拡張したものになっている。ここで、注意しなければならないのは、 S_u は基準インピーダンスが $Z_0/2$ 、 S_b, S_t は $2Z_0$ だということである。この辺の事情は、7-5節(2)に詳述した通りである。

対称性が良い場合は式が簡単になる。

$$Y_u = Y_{cc} = Z_{cc}^{-1} \quad S_u = S_{cc} \quad (7 \cdot 169)$$

$$Z_b = Z_t = Z_{dd} = Y_{dd}^{-1} \quad S_b = S_t = S_{dd} \quad (7 \cdot 170)$$

S_u は S_{cc} に一致し、 S_b と S_t はともに S_{dd} に一致する。このことは次のようにも理解できる。代表として不平衡接続の場合で説明する。(7・164)式の $(I + S_{dd})^{-1}$ は、

$$(I + S_{dd})^{-1} = I - S_{dd} + S_{dd}^2 - S_{dd}^3 + \dots \quad (7 \cdot 171)$$

と展開できるから、これはDモードの短絡終端による多重反射とみなせる。従って S_u は、Cモード自身の反射、 S_{cc} とCモードがいったんDモードへ転換して、またCモードに戻ってくる分、 $[C \rightarrow D \text{モードへ転換、} S_{dc}] \times [D \text{モードの短絡終端による多重反射、} -(I + S_{dd})^{-1}] \times [D \rightarrow C \text{モードへ転換、} S_{cd}]$ の2項の和と考えることができる(図71)

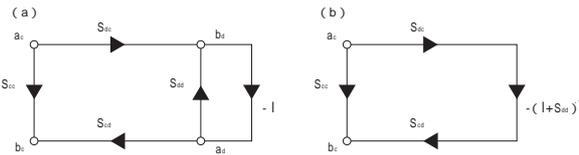


図71 S_u のシグナルフローグラフ

これは回路図で言えば、図72のような電流 I_d が流れていることに相当する。不平衡接続では、ポート1、3を直結しているのだから、それらの電圧は等しくなるが、電流は等しいとは限らない。その差が I_d である。回路が対称であれば、ポート1と3の電流が等しくなり、 I_d は流れない。そのとき、 $S_{dc} = S_{cd} = 0$ となり、(7・164)式の右辺第二項は無くなる。

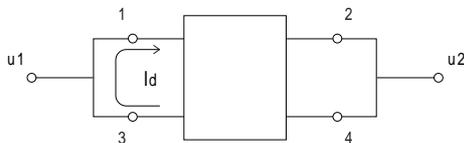


図72 不平衡接続のとき流れる電流

また $S_u = S_{cc}$ ということは、図62の2つのDポートは $Z_0/2$ で終端しても、shortしても特性が変わらないということを表わしている。実際、二等分定理からわかるように、それらのポートはCモードに対して開放(常に電流が流れない)になっているので、何を接続しても構わないのである。同様に $S_b = S_t = S_{dd}$ は、図62の2つのCポートを $2Z_0$ で終端しても、openあるいはshortしても特性が変わらないということを表わしている。対称な回路の場合、それらのポートはDモードに対して仮想接地(帰線に接続していても電位がゼロ)になっているので、何を接続しても構わないのである。

(2) 1ポートパラメータ

次に、4ポート回路の平衡・不平衡アドミタンス Y_b 、 Y_u を考える(図73,74)

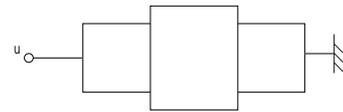


図73 4ポート回路の不平衡インピーダンス

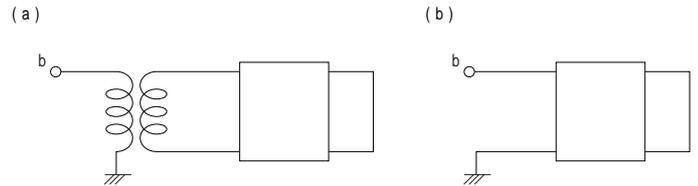


図74 4ポート回路の不平衡インピーダンス

(b)4ポート回路が浮いていれば、理想トランスは省いてもよい

これは、図68、69で u_2 あるいは b_2 ポートを接地したものである。従って、そのアドミタンスは、

$$Y_u = Y_{u11} = Y_{cc11} \quad (7 \cdot 172)$$

$$Y_b = Y_{b11} = Z_{dd22} / |Z_{dd}| \quad (7 \cdot 173)$$

となる。S行列で表わすには、 S_u 、 S_b にLΓZ法(6-2節(1)参照)を適用すればよい。(6・11)式を使って、

$$\Gamma_u = S_{u11} - S_{u12}S_{u21} / (1 + S_{u22}) \quad (7 \cdot 174)$$

$$\Gamma_b = S_{b11} - S_{b12}S_{b21} / (1 + S_{b22}) \quad (7 \cdot 175)$$

と書ける。ただし、 Γ_u の基準インピーダンスは $Z_0/2$ で、 Γ_b は $2Z_0$ だということに注意しなくてはならない。なお図74(a)は図67で $Z=0$ 、かつC₁ポートをopenにした状態と考えても計算できる。

(3) 具体例

ACM3225-102と、その巻線をほどき対称性を悪くしたサンプル(7-8節(3)参照)の2ポートパラメータ S_u 、 S_b 、 S_t を計算した。対称性が良ければ、 S_u は S_{cc} (図75(a))、 S_b と S_t はともに S_{dd} に一致する(図76(a))が、対称性が悪くなると乖離してくる(図75(b)(c)、図76(b)(c))

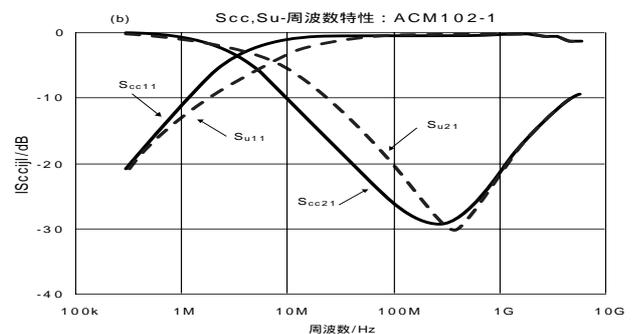
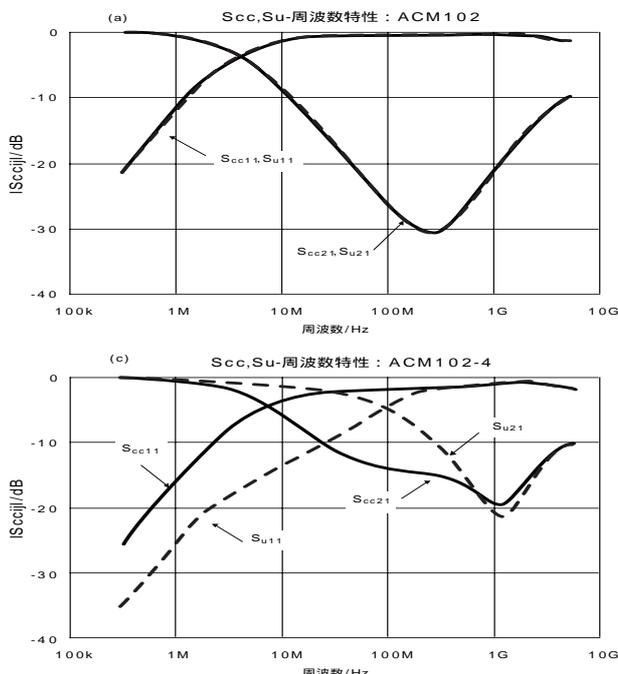


図75 対称性が悪いと S_{cc} 、 S_u はどうなるか

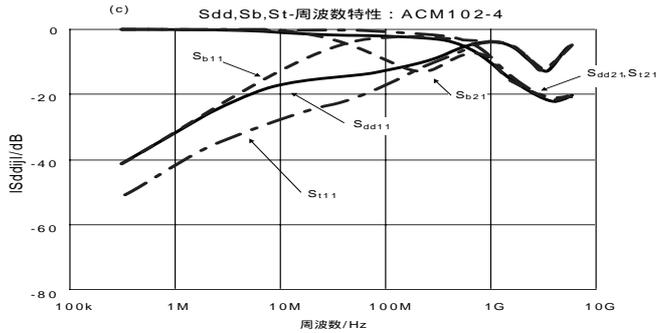
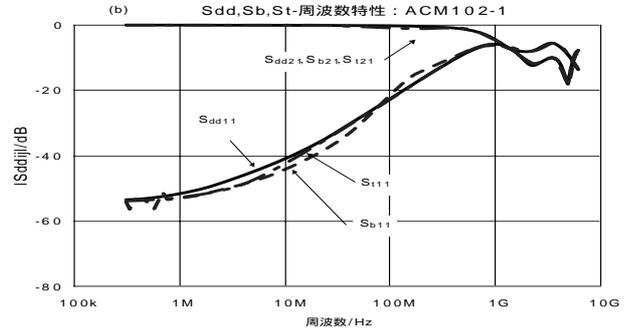
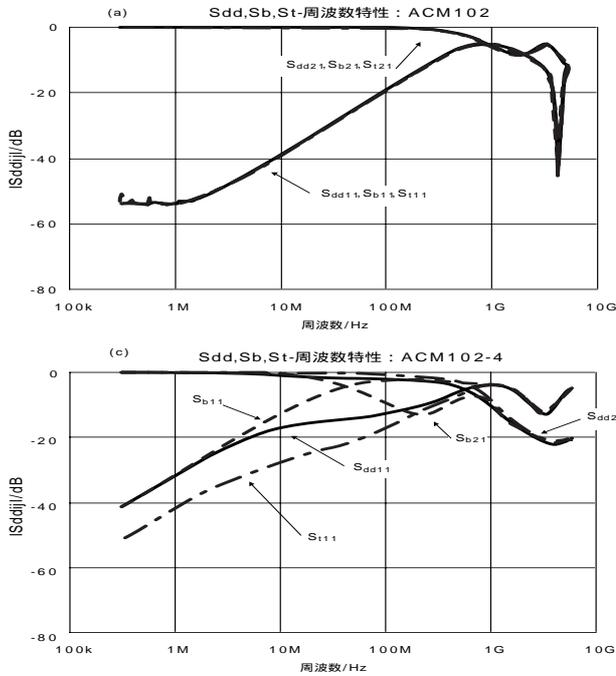


図76 対称性が悪いとSbb,Sb,Stはどうなるか

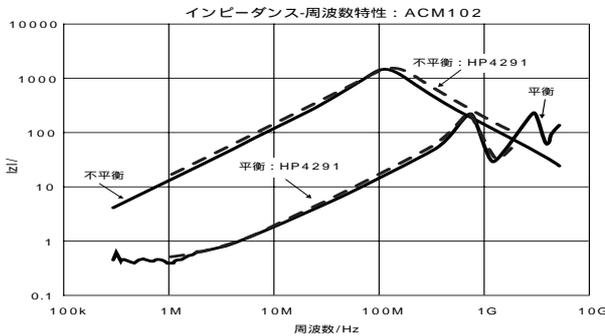


図77 ACM3225-102の平衡・不平衡インピーダンス

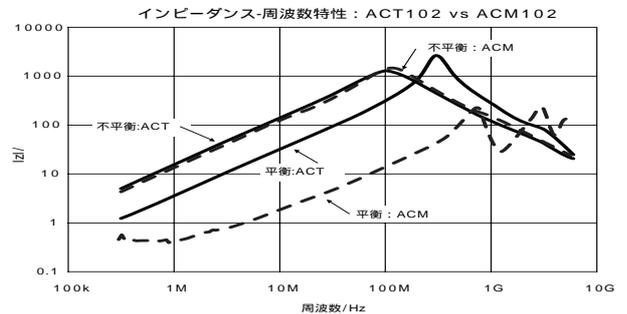


図78 ACT3225-102の平衡・不平衡インピーダンス (ACM3225-102と比較して)

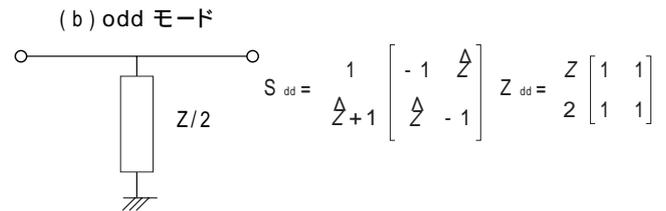
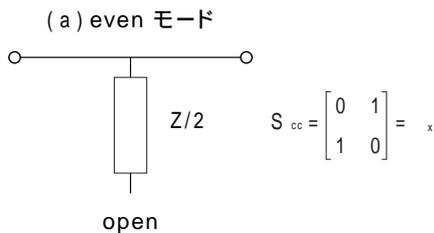


図79 parallel-thruに二等分定理を適用する

図77にACM3225-102の平衡・不平衡インピーダンスを示す。これは1ポートパラメータなので、通常のインピーダンスメータでも測定できる。ここではHP4291Aで実測した値も合わせて示す。両者は概ね一致している。この図からも不平衡モード(この場合は対称なので、Cモードと言ってもよい)ではピーズのような作用(図4(b)参照)をすることがわかる。また、低周波領域では、平衡インピーダンスは不平衡インピーダンスより2桁ほど小さく、平衡モード(Dモード)にはほとんど効かないことが理解できる。それに対し、結合をゆるめたACT3225-102は平衡インピーダンスが大きくなっている(図78)

7-11 4ポート回路のモード変換の例

以上の応用として、4ポート回路のモード変換の例を考察する。表12に変換前の4ポート回路行列と、C/Dモードに変換した

4ポート回路行列を併記して示す。

series-thru、shunt-thru、shunt to GNDはそれぞれの2ポート回路を2つ並べただけなので、その4ポート回路行列は容易にわかる。それを(7・143)(7・144)(7・133)式でモード変換する。parallel-thruは二等分定理を使って解析すればよい。回路に Z の対称性(図60)があれば、evenモードは対称面をopenにした2ポート回路で、oddモードは対称面を接地した2ポート回路で表わされる。従って、parallel-thruのeven/oddモード等価回路は図79のようになる。

これらをまとめて、even/oddモードの4ポートS行列は、

$$S_{\text{parallel-thru}} = \begin{bmatrix} S_{cc} & 0 \\ 0 & S_{dd} \end{bmatrix} \quad (7 \cdot 176)$$

と表わされる。モード変換前のS行列は、これを逆変換すれば求まる。

$$S_{\text{parallel-thru}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S_{cc} + S_{dd} & * \\ S_{cc} - S_{dd} & * \end{bmatrix} \quad (7.177)$$

Z、Y行列は4ポートとしては存在しない。なおparallel-thruは対称なので、平衡・不平衡接続(図68、69)で考えてもよい。また(7.177)式でポート3、4を接地すればshunt-thruの2ポートS行列(表5)になる。

次にトランスについて考える。まずトランスを2ポート部品と捉えたときの回路行列を示す⁽⁹⁾。

$$Z_{\text{trans}} = \begin{bmatrix} sL_1 & sM \\ sM & sL_2 \end{bmatrix} = sL \begin{bmatrix} 1/n & k \\ k & n \end{bmatrix} \quad (7.178)$$

$$Y_{\text{trans}} = \frac{1}{s(L_1L_2 - M^2)} \begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{sL(1-k^2)} \begin{bmatrix} n & -k \\ -k & 1/n \end{bmatrix} \quad (7.179)$$

$$F_{\text{trans}} = \begin{bmatrix} L_1/M & s(L_1L_2 - M^2)/M \\ 1/sM & L_2/M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/nk & sL(1-k^2)/k \\ 1/sLk & n/k \end{bmatrix} \quad (7.180)$$

$$S_{\text{trans}} = \frac{1}{s^2(L_1L_2 - M^2) + s(L_1 + L_2) + 1} \begin{bmatrix} s^2(L_1L_2 - M^2) + s(L_1 - L_2) - 1 & 2sM \\ 2sM & s^2(L_1L_2 - M^2) + s(L_2 - L_1) - 1 \end{bmatrix} \quad (7.181)$$

$$= \frac{1}{(sL)^2(1-k^2) + sL(1/n+n) + 1} \begin{bmatrix} (sL)^2(1-k^2) + sL(1/n-n) - 1 & 2sLk \\ 2sLk & (sL)^2(1-k^2) + sL(n-1/n) - 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{\text{trans}} = \frac{1}{2sM} \begin{bmatrix} -s^2(L_1L_2 - M^2) + s(L_1 + L_2) - 1 & s^2(L_1L_2 - M^2) + s(L_1 - L_2) - 1 \\ -s^2(L_1L_2 - M^2) + s(L_1 - L_2) - 1 & s^2(L_1L_2 - M^2) + s(L_1 + L_2) - 1 \end{bmatrix} \quad (7.182)$$

$$= \frac{1}{2sLk} \begin{bmatrix} -(sL)^2(1-k^2) + sL(1/n+n) - 1 & (sL)^2(1-k^2) + sL(1/n-n) - 1 \\ -(sL)^2(1-k^2) + sL(1/n-n) + 1 & (sL)^2(1-k^2) + sL(1/n+n) + 1 \end{bmatrix}$$

ここで、トランスの巻数比は $L_2 = n^2 L_1$ 、結合係数は $M = kL, L = \sqrt{L_1 L_2}$ で定義した。kは正負をとり、その符号で巻きの方向を表わす。そしてnは、 $n > 0$ とする。

Z行列はトランスの定義そのものを表現している。理想トランスの回路行列(4.13)(4.16)(4.17)式は、これらを $|k|=1$ で、Lとしたものに相当している。ただし、理想トランスでは、nに正負を持たせ、その符号で巻きの向きを表わすことに注意。すなわち、

$$n_{\text{理想trans}} = k \cdot n_{\text{trans}} \quad (7.183)$$

である($k = \pm 1$)。

これらの知見を基に4ポートの回路行列を導く。C/Dモード(対称なので不平衡・平衡と言い換えてもよい)のモード空間でトランスの特性を考える。トランスはその構造から明らかなように、Cモードの電流が流れない。従って、Cモードに対してはopenになっていると捉えることができる。一方、図69に則って考えれば、Dモードでは通常の2ポートトランスとして作用することがわかる。従って、4ポートのY行列は、

$$Y_{4\text{trans}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y_{\text{trans}} \end{bmatrix} \quad (7.184)$$

と表わされる。これに(7.148)式を適用し、S行列に変換すると、

$$S_{4\text{trans}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I + 2Z_0 Y_{\text{trans}} \\ & I + 2Z_0 Y_{\text{trans}} \end{bmatrix} \quad (7.185)$$

となる。これらを逆変換すれば、4ポートトランスのモード変換前の回路行列が得られる。CMCCの回路行列は、4ポートトランス

の回路行列のポート2とポート3を交換すればよい。ただそれだけである。

それらに $|k|=1, L$ という演算を施せば、理想トランス(IT)、理想CMCC(IC)の回路行列が得られる。その4ポートS行列は、あらわに書くと、

$$S_{4IT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ & (1-n^2)/(n^2+1) & 2n/(n^2+1) \\ & 2n/(n^2+1) & (n^2-1)/(n^2+1) \end{bmatrix} \quad (7.186)$$

$$S_{4IC} = \frac{1}{2(n^2+1)} \begin{bmatrix} (1+n)^2 & (1-n)^2 & 1-n^2 & n^2-1 \\ (1-n)^2 & (1+n)^2 & n^2-1 & 1-n^2 \\ 1-n^2 & n^2-1 & (1-n)^2 & (1+n)^2 \\ n^2-1 & 1-n^2 & (1+n)^2 & (1-n)^2 \end{bmatrix} \quad (7.187)$$

である。n=1の場合、両者は一致する。

$$S_{4IT:1:1} = S_{4IC:1:1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \quad (7.188)$$

すなわち、1:1の理想トランスと理想CMCCは、交流に対しては同じ作用をする素子と考えてよい。Cモードにとってはopenで、Dモードにとってはthruになる。これを逆変換すれば、

$$S_{4/T:1:1} = S_{4/C:1:1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+x & * \\ 1-x & * \end{bmatrix} \quad (7.189)$$

と(4.26)式が得られる。

これらの例(表12)でも、 Z_{22} の対称性を持っているとモード変換後の回路行列がブロック対角化されることを確認できる。そのとき、CモードとDモードは独立になり、見通しが利くようになる。逆にいくつかの回路は、そういったモード空間で考えることにより、始めてその特性を理解できるものがあつた。これらがモード変換の威力である。

次に2ポートパラメータを考える。 Z_{22} の対称性がある回路では、 S_{u1} は S_{cc} に、 S_{b1} と S_{t1} はともに S_{dd} に一致する。そこで、対称性がない回路についてだけ、表13に2ポートパラメータの例を示す。

series-thru、shunt-thru、shunt to GNDでは $S_u = S_t$ となっているが、それは回路が2面で分離できるからである。分離している場合は、ポート間に相互作用がないので $S_{21} = S_{12} = 0$ となり、従って $S_{cc} = S_{dd}$ 、 $S_{dc} = S_{cd}$ となる。

CMCCの L_u, L_b は、図80の等価回路⁽³⁾で考えるとわかりやすい。

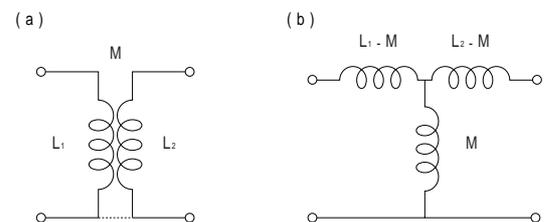


図80 トランスの等価回路(共通帰線の場合)

図80(b)に図68、69をあてはめれば、表13の回路図が得られる。CMCCが対称の場合($L_1 = L_2, n = 1$) L_u, L_b は、

$$L_u = L_c = (L + M)/2 \quad (7.190)$$

$$L_b = L_t = L_d = 2(L - M) \quad (7.191)$$

と簡単になる。even/oddモードで言えば、

$$L_{\text{even}} = L + M \quad L_{\text{odd}} = L - M \quad (7.192)$$

である。これは図80(b)に二等分定理を適用しても求められる。

構成	Z	Z	Y	Y	S	S=S
series-thru 	無		$\begin{bmatrix} Y_{11} & 0 \\ 0 & Y_{22} \end{bmatrix}$ (Y1)	$\begin{bmatrix} 2Y_{cc} & * \\ Y_{dc} & Y_{cc}/2 \end{bmatrix}$ (Y2)	$\begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix}$ (S1)	$\begin{bmatrix} S_{cc} & * \\ S_{dc} & * \end{bmatrix}$ (S2)
shunt-thru 	$\begin{bmatrix} Z_{11} & 0 \\ 0 & Z_{22} \end{bmatrix}$ (Z1)	$\begin{bmatrix} Z_{cc}/2 & * \\ Z_{dc} & 2Z_{cc} \end{bmatrix}$ (Z2)	無		$\begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix}$ (S3)	$\begin{bmatrix} S_{cc} & * \\ S_{dc} & * \end{bmatrix}$ (S4)
shunt to GND 	$\begin{bmatrix} Z_{11} & 0 \\ 0 & Z_{22} \end{bmatrix}$ (Z3)	$\begin{bmatrix} Z_{cc}/2 & * \\ Z_{dc} & 2Z_{cc} \end{bmatrix}$ (Z4)	$\begin{bmatrix} Y_{11} & 0 \\ 0 & Y_{22} \end{bmatrix}$ (Y3)	$\begin{bmatrix} 2Y_{cc} & * \\ Y_{dc} & Y_{cc}/2 \end{bmatrix}$ (Y4)	$\begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix}$ (S5)	$\begin{bmatrix} S_{cc} & * \\ S_{dc} & * \end{bmatrix}$ (S6)
parallel-thru 	無		無		$\begin{bmatrix} S_{11} & * \\ S_{21} & * \end{bmatrix}$ (S7)	$\begin{bmatrix} S_{cc} & 0 \\ 0 & S_{dd} \end{bmatrix}$ (S8)
トランス 	無		$\begin{bmatrix} Y_{dd} & * \\ -Y_{dd} & * \end{bmatrix}$ (Y5)	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y_{dd} \end{bmatrix}$ (Y5)	$\begin{bmatrix} S_{11} & * \\ S_{21} & * \end{bmatrix}$ 一般(S9),理想(S11)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_{dd} \end{bmatrix}$ 一般(S10),理想(S12)
CMCC 	無		$\begin{bmatrix} Y_{11} & * \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$ (Y6)	$\begin{bmatrix} Y_{cc} & * \\ Y_{dc} & Y_{dd} \end{bmatrix}$ (Y7)	$\begin{bmatrix} S_{11} & * \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$ 一般(S13),理想(S15)	$\begin{bmatrix} S_{cc} & * \\ S_{dc} & S_{dd} \end{bmatrix}$ 一般(S14),理想(S16)

ただし、各ポートの基準インピーダンスは全て同一で、 Z_0 とする。「 $\hat{\cdot}$ 」が付いている文字は、 Z_0 で除した値であることを示す。
 簡単のため、 $\hat{X} = sL/2$ とおいた。sは複素角周波数。
 また $G(x) = (x - Z_0)/(x + Z_0)$ という関数とした。そして、 $\Gamma_i = G(Z_i)$ と略記した。
 トランスの巻数比は $L_2 = n^2 L_1$ 、結合係数は $M = kL$ 、 $L = \sqrt{L_1 L_2}$ と定める。

$$\begin{aligned}
 (Z1) Z_{11} &= Z_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, Z_{22} = Z_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, (Z2) Z_{cc} = \frac{Z_1 + Z_2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, Z_{dc} = \frac{Z_1 - Z_2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, (Z3) Z_{11} = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{bmatrix}, Z_{22} = \begin{bmatrix} Z_3 & 0 \\ 0 & Z_4 \end{bmatrix} \\
 (Z4) Z_{cc} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & 0 \\ 0 & Z_2 + Z_4 \end{bmatrix}, Z_{dc} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Z_1 - Z_3 & 0 \\ 0 & Z_2 - Z_4 \end{bmatrix} \\
 (Y1) Y_{11} &= Y_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, Y_{22} = Y_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, (Y2) Y_{cc} = \frac{Y_1 + Y_2}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, Y_{dc} = \frac{Y_1 - Y_2}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, (Y3) Y_{11} = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{bmatrix}, Y_{22} = \begin{bmatrix} Y_3 & 0 \\ 0 & Y_4 \end{bmatrix} \\
 (Y4) Y_{cc} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Y_1 + Y_3 & 0 \\ 0 & Y_2 + Y_4 \end{bmatrix}, Y_{dc} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Y_1 - Y_3 & 0 \\ 0 & Y_2 - Y_4 \end{bmatrix}, (Y5) Y_{dd} = \frac{1}{s(L_1 L_2 - M^2)} \begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{sL(1 - k^2)} \begin{bmatrix} n & -k \\ -k & 1/n \end{bmatrix} \\
 (Y6) Y_{11} &= Y_{dd11,trans} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{n}{sL(1 - k^2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, Y_{22} = Y_{dd22,trans} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{sL(1 - k^2)n} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, Y_{21} = Y_{dd21,trans} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{-k}{sL(1 - k^2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 (Y7) Y_{cc} &= Y_{11} + 2Y_{21} + Y_{22} = \frac{n + 1/n - 2k}{sL(1 - k^2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, Y_{dd} = \frac{Y_{11} - 2Y_{21} + Y_{22}}{4} = \frac{n + 1/n + 2k}{4sL(1 - k^2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, Y_{dc} = \frac{Y_{11} - Y_{22}}{2} = \frac{n - 1/n}{2sL(1 - k^2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 (S1) S_{11} &= \frac{1}{\hat{Z}_1 + 2} \begin{bmatrix} \hat{Z}_1 & 2 \\ 2 & \hat{Z}_1 \end{bmatrix}, S_{22} = \frac{1}{\hat{Z}_2 + 2} \begin{bmatrix} \hat{Z}_2 & 2 \\ 2 & \hat{Z}_2 \end{bmatrix}, (S2) S_{cc} = \frac{1}{(\hat{Z}_1 + 2)(\hat{Z}_2 + 2)} \begin{bmatrix} \hat{Z}_1 \hat{Z}_2 + \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 & * \\ \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + 4 & * \end{bmatrix}, S_{dc} = \frac{\hat{Z}_1 - \hat{Z}_2}{(\hat{Z}_1 + 2)(\hat{Z}_2 + 2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 (S3) S_{11} &= \frac{1}{2\hat{Z}_1 + 1} \begin{bmatrix} -1 & 2\hat{Z}_1 \\ 2\hat{Z}_1 & -1 \end{bmatrix}, S_{22} = \frac{1}{2\hat{Z}_2 + 1} \begin{bmatrix} -1 & 2\hat{Z}_2 \\ 2\hat{Z}_2 & -1 \end{bmatrix}, (S4) S_{cc} = \frac{1}{(2\hat{Z}_1 + 1)(2\hat{Z}_2 + 1)} \begin{bmatrix} -(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + 1) & * \\ 4\hat{Z}_1 \hat{Z}_2 + \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 & * \end{bmatrix}, S_{dc} = \frac{\hat{Z}_1 - \hat{Z}_2}{(2\hat{Z}_1 + 1)(2\hat{Z}_2 + 1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 (S5) S_{11} &= \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix}, S_{22} = \begin{bmatrix} \Gamma_3 & 0 \\ 0 & \Gamma_4 \end{bmatrix}, (S6) S_{dc} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Gamma_1 + \Gamma_3 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 + \Gamma_4 \end{bmatrix}, S_{dd} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Gamma_1 - \Gamma_3 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 - \Gamma_4 \end{bmatrix} \\
 (S7) S_{11} &= \frac{1}{2(\hat{Z} + 1)} \begin{bmatrix} -1 & 2\hat{Z} + 1 \\ 2\hat{Z} + 1 & -1 \end{bmatrix}, S_{21} = \frac{1}{2(\hat{Z} + 1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, (S8) S_{cc} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, S_{dd} = \frac{1}{\hat{Z} + 1} \begin{bmatrix} -1 & \hat{Z} \\ \hat{Z} & -1 \end{bmatrix} \\
 (S9) S_{11} &= \frac{1}{2} (+S_{dd}) = \frac{\hat{X}}{\hat{X}^2(1 - k^2) + \hat{X}(n + 1/n) + 1} \begin{bmatrix} \hat{X}(1 - k^2) + 1/n & k \\ k & \hat{X}(1 - k^2) + n \end{bmatrix}, S_{21} = \frac{1}{2} (-S_{dd}) = \frac{1}{\hat{X}^2(1 - k^2) + \hat{X}(n + 1/n) + 1} \begin{bmatrix} \hat{X}n + 1 & -k\hat{X} \\ -k\hat{X} & \hat{X}/n + 1 \end{bmatrix} \\
 (S10) S_{dd} &= \frac{-2Z_0 Y_{dd}}{+2Z_0 Y_{dd}} = \frac{1}{\hat{X}^2(1 - k^2) + \hat{X}(n + 1/n) + 1} \begin{bmatrix} \hat{X}^2(1 - k^2) + \hat{X}(1/n - n) - 1 & 2k\hat{X} \\ 2k\hat{X} & \hat{X}^2(1 - k^2) + \hat{X}(n - 1/n) - 1 \end{bmatrix} \\
 (S11) S_{11} &= \frac{1}{n^2 + 1} \begin{bmatrix} 1 & n \\ n & n^2 \end{bmatrix}, S_{21} = \frac{1}{n^2 + 1} \begin{bmatrix} n^2 & -n \\ -n & 1 \end{bmatrix}, (S12) S_{dd} = \frac{1}{n^2 + 1} \begin{bmatrix} 1 - n^2 & 2n \\ 2n & n^2 - 1 \end{bmatrix} \\
 (S13) S_{11} &= \frac{1}{\hat{X}^2(1 - k^2) + \hat{X}(n + 1/n) + 1} \begin{bmatrix} \hat{X}^2(1 - k^2) + \hat{X}/n & * \\ \hat{X}n + 1 & * \end{bmatrix}, S_{22} = \frac{1}{\hat{X}^2(1 - k^2) + \hat{X}(n + 1/n) + 1} \begin{bmatrix} \hat{X}^2(1 - k^2) + \hat{X}n & * \\ \hat{X}/n + 1 & * \end{bmatrix}, S_{21} = \frac{k\hat{X}}{\hat{X}^2(1 - k^2) + \hat{X}(n + 1/n) + 1} \begin{bmatrix} 1 & * \\ -1 & * \end{bmatrix} \\
 (S14) S_{cc} &= \frac{1}{\hat{X}^2(1 - k^2) + \hat{X}(n + 1/n) + 1} \begin{bmatrix} \hat{X}^2(1 - k^2) + \hat{X}(n + 1/n)/2 + k\hat{X} & * \\ \hat{X}(n + 1/n)/2 - k\hat{X} + 1 & * \end{bmatrix}, S_{dd} = \frac{1}{\hat{X}^2(1 - k^2) + \hat{X}(n + 1/n) + 1} \begin{bmatrix} \hat{X}^2(1 - k^2) + \hat{X}(n + 1/n)/2 - k\hat{X} & * \\ \hat{X}(n + 1/n)/2 + k\hat{X} + 1 & * \end{bmatrix} \\
 S_{dc} &= \frac{\hat{X}(1/n - n)/2}{\hat{X}^2(1 - k^2) + \hat{X}(n + 1/n) + 1} \begin{bmatrix} 1 & * \\ -1 & * \end{bmatrix}, (S15) S_{11} = \frac{1}{n^2 + 1} \begin{bmatrix} 1 & * \\ n^2 & * \end{bmatrix}, S_{22} = \frac{1}{n^2 + 1} \begin{bmatrix} n^2 & * \\ 1 & * \end{bmatrix}, S_{21} = \frac{n}{n^2 + 1} \begin{bmatrix} 1 & * \\ -1 & * \end{bmatrix} \\
 (S16) S_{cc} &= \frac{1}{2(n^2 + 1)} \begin{bmatrix} (1 + n)^2 & * \\ (1 - n)^2 & * \end{bmatrix}, S_{dd} = \frac{1}{2(n^2 + 1)} \begin{bmatrix} (1 - n)^2 & * \\ (1 + n)^2 & * \end{bmatrix}, S_{dc} = \frac{1 - n^2}{2(n^2 + 1)} \begin{bmatrix} 1 & * \\ -1 & * \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

表 12 4ポート回路行列の例

構成		Z,Y	S	回路図
series-thru 	u	$Y_u = 4Y_1 = (Y_1+Y_2) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$S_u = S_1 = \frac{1}{1+\hat{Y}_1+\hat{Y}_2} \begin{bmatrix} 1 & * \\ \hat{Y}_1+\hat{Y}_2 & * \end{bmatrix}$	
	b	$Y_b = \frac{1}{Z_1+Z_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$S_b = \frac{1}{4+\hat{Z}_1+\hat{Z}_2} \begin{bmatrix} \hat{Z}_1+\hat{Z}_2 & * \\ 4 & * \end{bmatrix}$	
shunt-thru 	u	$Z_u = Z_1/4 = \frac{1}{Y_1+Y_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$S_u = S_1 = \frac{1}{4+\hat{Y}_1+\hat{Y}_2} \begin{bmatrix} -(\hat{Y}_1+\hat{Y}_2) & * \\ 4 & * \end{bmatrix}$	
	b	$Z_b = (Z_1+Z_2) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$S_b = \frac{1}{1+\hat{Z}_1+\hat{Z}_2} \begin{bmatrix} -1 & * \\ \hat{Z}_1+\hat{Z}_2 & * \end{bmatrix}$	
shunt-to GND 	u	$Y_u = 4Y_1 = \begin{bmatrix} Y_1+Y_3 & 0 \\ 0 & Y_2+Y_4 \end{bmatrix}$	$S_u = S_1 = \begin{bmatrix} G((Y_1+Y_3)/2) & 0 \\ 0 & G((Y_2+Y_4)/2) \end{bmatrix}$	
	b	$Z_b = \begin{bmatrix} Z_1+Z_3 & 0 \\ 0 & Z_2+Z_4 \end{bmatrix}$	$S_b = \begin{bmatrix} G(Z_1+Z_3/2) & 0 \\ 0 & G(Z_2+Z_4/2) \end{bmatrix}$	
CMCC 	u	$L_u = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \implies \text{対称の場合 } L_u = L_c = \frac{L+M}{2}$		
	t	$L_t = 4 \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} \implies \text{対称の場合 } L_t = L_d = 2(L-M)$		
	b	$L_b = L_1 + L_2 - 2M \implies \text{対称の場合 } L_b = L_d = 2(L-M)$		

$$G\left(\frac{Y_1+Y_3}{2}\right) = \frac{2-(\hat{Y}_1+\hat{Y}_3)}{2+(\hat{Y}_1+\hat{Y}_3)} \quad G\left(\frac{Y_2+Y_4}{2}\right) = \frac{2-(\hat{Y}_2+\hat{Y}_4)}{2+(\hat{Y}_2+\hat{Y}_4)} \quad G\left(\frac{Z_1+Z_3}{2}\right) = \frac{(\hat{Z}_1+\hat{Z}_3)-2}{(\hat{Z}_1+\hat{Z}_3)+2} \quad G\left(\frac{Z_2+Z_4}{2}\right) = \frac{(\hat{Z}_2+\hat{Z}_4)-2}{(\hat{Z}_2+\hat{Z}_4)+2}$$

表13 2ポートパラメータ

構成	S	C	D
series-thru 	$\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \quad S = \frac{1}{\hat{Z}+2} \begin{bmatrix} \hat{Z} & 2 \\ 2 & \hat{Z} \end{bmatrix}$		
Z ₁ =Z ₂ =Z			
理想CMCC 	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$		x
n=1			
shunt-thru 	$\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \quad S = \frac{1}{2\hat{Z}+1} \begin{bmatrix} -1 & 2\hat{Z} \\ 2\hat{Z} & -1 \end{bmatrix}$		
Z ₁ =Z ₂ =Z			
parallel-thru 	$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & S_{dd} \end{bmatrix} \quad S_{dd} = \frac{1}{\hat{Z}+1} \begin{bmatrix} -1 & \hat{Z} \\ \hat{Z} & -1 \end{bmatrix}$		x

表14 evenモード、oddモードに対する効果

CMCCの機能は相互インダクタンスM(M≠0)に起因している。M=0であれば、単にseries-thru配置の2つのコイルになり、L_{even}=L_{odd}=Lである。その状態からMが増加してくると、L_{even}は大きくなり、逆にL_{odd}は小さくなる。そしてMが最も大きくなったとき(密結合、M=L, k=1) L_{even}=2L、L_{odd}=0となる。これはevenモードでは2Lのコイルとして働くが、oddモードに対しては何も無いのと同じになることを意味している。その状態で、Lの極限をとれば(7・188)式となる。

表14に各種回路(series-thru, 理想CMCC, shunt-thru, parallel-thru, すべて対称の場合)のevenモード、oddモードに対する効果をまとめた。series-thru, shunt-thruはevenモード、oddモードどちらに対しても同じ効果(それぞれ2ポートのseries-thru, shunt-thruとして作用する)をもたらす。それに対して、理想CMCCはevenモードのみ、parallel-thruはoddモードのみに効く。

7-12 各種モード変換の比較

以上、2ポート回路と4ポート回路を題材にとり、各種モード変換について述べてきた。本節では、それらの何種類かあったモード変換を比較してみる。

最初に次のような例題を考えてみよう。平行に並んでいるが、結合していない2つの伝送線路(その特性インピーダンスは50とする)に、電流が1Aずつ同方向に流れている状態を想定する(図81)

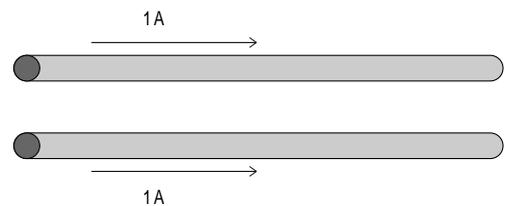


図81 平行に並んでいる伝送線路

このようなとき、「commonモード電流が流れている」と表現するのは異論がないだろう。しかし、「そのcommonモード電流を何Aと称するか」ということになると、いろいろな流儀が存在する。

- 1Aのまま
- 両方足して、2A
- その真ん中で、 $\sqrt{2}A$

これらの定義の違いがどのような結果をもたらすのかを、以下では考えてみたい。伝送線路にかかっている電圧は両線路ともに50Vである。従って、全体の電力は100Wとなる。このモード電流を1Aと称するのなら、モード電圧は100Vでなければならない(電力条件)。従って、このモードの特性インピーダンスは100になる。同様に、このモード電流を2Aと称するのなら、電力条件よりモード電圧は50Vである。そのとき特性インピーダンスは

25 となる。 $\sqrt{2}A$ なら、特性インピーダンスは変わらず50である。 がC モード、 がC モード、 がevenモードである。定性的な議論をしているうちは、これら3つのモードを区別する必要はない。しかし、commonモードを定量的に捉えたい場合(もっと限定して言えば、インピーダンスについて考えるときは)ここに書いた定義が問題となる。

具体的にどう違うかは、前節までで詳論した通りである。理論的取り扱い、特性インピーダンスを気にしなくてよい分、のeven/oddモードが容易であり、また間違いも少ないだろう。しかし一般にEMCの世界では、のC /D モードが主流のようである。それは、図81の並行2線を一本(遠くから見たらそう見える)とみなしたときの電流(あるいは帰路電流と考えてもよい)がそうだからである。または数値的に扱ったとき、 $\sqrt{2}$ という無理数がわずらわしいのかもしれない。

次に平衡・不平衡接続について考えてみる。これは上記3種類のモード変換とは本質的に異なる。ただし、回路が対称の場合、C /D モードのパラメータに一致するので、そのときは両者を区別する必要はない。しかし対称でない場合まで考察の範囲を広げるのであれば、その取り扱いは慎重を要する。

本稿ではeven/oddとcommon/differential(C /D、C /D) 不平衡/平衡という言葉を使い分けてきたが、一般には混用されている。従って、対称かどうか、定量的か定性的か、よくその前提条件を見極め判断しなくてはならない。

次にパラメータの数について考える。対称な回路を考察する場合、モード変換することによって次元を下げ(ブロック対角化される)少ないパラメータで回路を把握することができる。しかし対称でない回路ではそうはいかない。commonモードのパラメータとdifferentialモードのパラメータ(あるいは平衡/不平衡でも)の2つ以外に、commonモードとdifferentialモードの相互作用を表わす何らかのパラメータを追加する必要がある。

4ポート回路の1ポートパラメータ(7-10節(2)で定義したもの)はさらに情報量が少ない。4ポート回路の特性は4次行列すなわち16個(相反性を仮定すれば10個)のパラメータで表現される。対称であったとしても、パラメータ数はその半分の8個(相反のときは6個)までしか減少しない。それらを勘案すれば、平衡・不平衡アドミタンスなどの1ポートパラメータ2個だけでは、一般には回路全体の特性を表現しきれないことは容易に理解できる。2個の1ポートパラメータで済むのはどのような場合であろうか、以下ではそのことを考察する。結論を言えば、回路が対称であることに加え、common/differential(あるいは平衡/不平衡)モードに対する2ポート等価回路が、それぞれ図82のようなseries-thru型に描けること(これには、対称性も含まれている)という条件が必要である。図82の回路では、その特性はインピーダンスZだけで規定される。従って、commonと

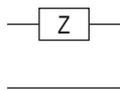


図82 series-thru回路

differential、それぞれに対して1個(計2個)のパラメータで回路全体を表現できることになる。表12の例の中では、series-thruとCMCCがそれに該当している。ただし実在のCMCCでは、1次-2次巻き線間の容量があるため、高い周波数になるとdifferentialモード(巻き線間容量はcommonモードに対しては効かない)に

対しては図82のような等価回路では表現できなくなってくる。従って、図77,78で示したような平衡インピーダンスは高い周波数では部品を代表するパラメータとは言えない。またの条件は、部品が集中定数回路であるということも前提条件として内包している。従って、その方面から考えても、「1ポートパラメータはあまり高い周波数ではその意味を失う」ということにも注意しなくてはならない。

7-13 モード生成素子

(1) 無損失相反3ポート回路の性質

本節の議論の前に、無損失相反3ポート回路に関する次の定理を証明しておこう⁽⁵⁾。

完全整合(3ポート全てが整合する)できない。

2つのポートの整合が取れていると、残りのポートは分離される。

1つのポートだけ整合している場合は、他の2つのポートを分離することはできない。

3ポート相反回路のS行列は、

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} \\ S_{21} & S_{22} & S_{32} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (7 \cdot 193)$$

と表わされる。これが、無損失であるならば、Unitary条件より、

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 + |S_{31}|^2 = 1 \quad (7 \cdot 194)$$

$$|S_{21}|^2 + |S_{22}|^2 + |S_{32}|^2 = 1 \quad (7 \cdot 195)$$

$$|S_{31}|^2 + |S_{32}|^2 + |S_{33}|^2 = 1 \quad (7 \cdot 196)$$

$$S_{11}S_{21}^* + S_{21}S_{22}^* + S_{31}S_{32}^* = 0 \quad (7 \cdot 197)$$

$$S_{21}S_{31}^* + S_{22}S_{32}^* + S_{32}S_{33}^* = 0 \quad (7 \cdot 198)$$

$$S_{31}S_{11}^* + S_{32}S_{21}^* + S_{33}S_{31}^* = 0 \quad (7 \cdot 199)$$

が成り立つ。

の証明:ここで、完全整合($S_{11}=S_{22}=S_{33}=0$)しているとする、(7・194)~(7・199)式は、

$$|S_{21}|^2 + |S_{31}|^2 = |S_{21}|^2 + |S_{32}|^2 = |S_{31}|^2 + |S_{32}|^2 = 1 \quad (7 \cdot 200)$$

$$S_{31}S_{32}^* = S_{21}S_{31}^* = S_{32}S_{21}^* = 0 \quad (7 \cdot 201)$$

となる。(7・201)式が成り立つためには、 S_{21}, S_{31}, S_{32} のうち2つが0でなければならないが、そうすると(7・200)式が満たされなくなる。従って、完全整合することはできない。

の証明:例えば、 $S_{11}=S_{22}=0$ だとすると、(7・194)(7・195)式は、

$$|S_{21}|^2 + |S_{31}|^2 = |S_{21}|^2 + |S_{32}|^2 = 1 \quad (7 \cdot 202)$$

となる。従って、

$$|S_{31}| = |S_{32}| \quad (7 \cdot 203)$$

である。一方、(7・197)式より、

$$S_{31}S_{32}^* = 0 \quad (7 \cdot 204)$$

となっているのであるから、結局、

$$S_{31} = S_{32} = 0 \quad (7 \cdot 205)$$

でなければならない。従って、ポート3は他のポート1,2から分離される。これを(7・202)(7・196)式に代入すると、

$$|S_{21}| = |S_{33}| = 1 \quad (7 \cdot 206)$$

が得られる。

の証明:例えば、 $S_{11}=0$ だとすると、(7・197)(7・199)式は、

$$S_{21}S_{22}^* + S_{31}S_{32}^* = 0 \quad (7.207)$$

$$S_{32}S_{21}^* + S_{33}S_{31}^* = 0 \quad (7.208)$$

となる。この2式から S_{21} を消去すると、

$$S_{31}^*(S_{22}S_{33} - S_{32}^2) = 0 \quad (7.209)$$

である。従って、 $S_{31}=0$ または $S_{22}S_{33}=S_{32}^2$ でなければならない。

$S_{31}=0$ の場合、(7.207)式より $S_{21}S_{22}^*=0$ 、また(7.194)式より $|S_{21}|=1$ だから、 $S_{22}=0$ となり、仮定に反する(の形になる) $S_{22}S_{33}=S_{32}^2$ の場合、仮定($S_{22}=0$ 、 $S_{33}=0$)より、

$$S_{32}=0 \quad (7.210)$$

となる。従って、ポート2,3は分離できない。

以上の定理をまとめると表15のようになる。

$S = \begin{bmatrix} 0 & S_{21} & S_{31} \\ S_{21} & 0 & S_{32} \\ S_{31} & S_{32} & 0 \end{bmatrix}$	となる無損失回路 (Unitary行列) はない。
$S = \begin{bmatrix} 0 & S_{21} & 0 \\ S_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix}$	ただし、 $ S_{21} = S_{33} = 1$
$S = \begin{bmatrix} 0 & S_{21} & S_{31} \\ S_{21} & S_{22} & S_{32} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$	という形のUnitary行列は $S_{32} \neq 0$ となる。ただし、 $S_{22} \neq 0$ 、 $S_{33} \neq 0$ 。また S_{21} 、 S_{31} は同時にはゼロにならない。

表15 無損失相反3ポート回路の性質

を総合すると、入力ポートが整合されている無損失相反電力分配器は、出力ポート間が分離しない(分離していると)の形になり電力分配器にならないと言える。

(2) モード生成素子での判定

4ポート回路のCモードの特性(S_{cc})は、もしDモードに関する情報(S_{dd} や S_{dc} 、 S_{cd})がいらなければ、図62の2つのDポートを $2Z_0$ で終端した図83のような回路で計算すればよい。

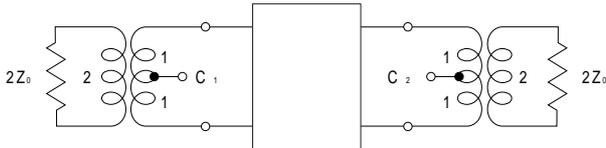


図83 Cモードの特性の評価

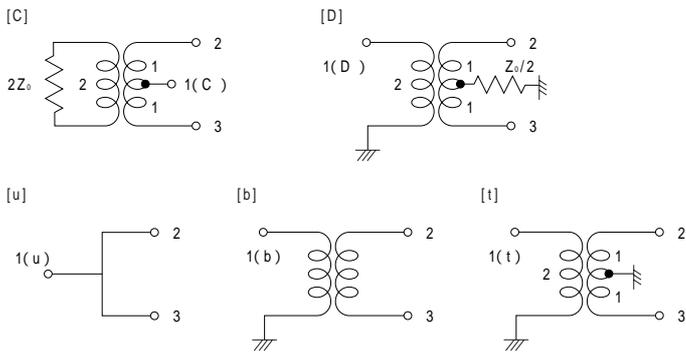


図84 モード生成素子

このとき使われた変換回路を抜き出したのが図84[C]である(図38のDポートを $2Z_0$ で終端したもの)。この3ポート回路は、入力ポート(ポート1)を励振したとき、出力ポート(ポート2,3)にCモードが誘起される、言わば「Cモードを生成する電力分配器」と見ることができる。同様に、図38のCポートを $Z_0/2$ で終端した3ポート回路はDモードを生成する素子と考えられる(図

84[D])。一方、平衡・不平衡接続の場合は、図84[u],[b],[t]が生成素子となる。

各種モード変換の性質を、ここに挙げたモード生成素子の視点から捉え直してみよう。まずそれらの3ポートS行列を求める。図38の回路は、Cポート(ポート3とする)の基準インピーダンスを $Z_0/2$ 、Dポート(ポート4)の基準インピーダンスを $2Z_0$ とすると、図34(b)に戻るの、その4ポートS行列は(7.59)式のマジックTのS行列、

$$S_{\text{magic-T}} = \begin{bmatrix} 0 & Q & 1 & 1 \\ Q & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.211)$$

で与えられる。回路[C]は、図38でDポートを整合終端したものであるから、(7.211)式の左上3行3列

$$S_{[C]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.212)$$

がそのS行列になる。また回路[u]は、図38でDポートをshortしたものであるから、(7.116)式に、(7.211)式と $S_{N11} = -1$ を代入して、

$$S_{[u]} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.213)$$

と求めることができる。その他の回路も同様の手順で計算し、まとめたのが表16である。この表では、図84でふったポート番号

	モード生成素子	S	S
[C]		$\begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
[u]		$\begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

表16(a) commonモードを生成する素子

	モード生成素子	S	S
[D]		$\begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
[b]		$\begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
[t]		$\begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & -1/2 \\ -1/\sqrt{2} & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

表16(b) differentialモードを生成する素子

に基づいて表示しているため、(7.212)(7.213)式のおよび列を適当に入れ換えている。また、ポート1の基準インピーダ

ンスは、回路[C]、[u]では $Z_0/2$ 、回路[D]、[b]、[t]では $2Z_0$ になっていることに注意。また、それらのS行列の出力ポート(ポート2、3)をeven/oddにモード変換したSも併記した。Sは、元のS行列を

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (7.214)$$

と分けしたとき、

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \quad (7.215)$$

で与えられる。

さて、表16(a)の3ポートS行列を比べてみよう。S_[C]では入力ポートの電力が $1/\sqrt{2}$ ずつ出力ポートに分配され、また逆に、出力ポートの電力は $1/\sqrt{2}$ ずつ合成される。そして、ポート2、3は完全に分離されている。これは、3dBの理想power splitterである。実際シミュレータ(Series)に用意されているSPLIT2素子も同じ特性を持っている。一方S_[u]では、出力ポート間が分離されていない。先に述べたように、無損失相反電力分配器は出力ポート間が分離できないのである。回路[u]は、ポート間を線でつないただけなので、電力を消費するものがない。それに引き換え、回路[C]には $2Z_0$ の抵抗が含まれているので、完全整合かつ出力ポート間の分離が実現できている。Sを見ると、回路[C]はモード空間上でも完全整合しているのに対し、回路[u]はoddモードに対してshortになっていることが再確認できる。これは出力ポート間が分離できていないことに対応している。回路[D]と回路[b]、[t]の関係も同様である(表16(b))。ただしこれらは、入力ポートの電力が $1/\sqrt{2}$ と $-1/\sqrt{2}$ に分配される。すなわち180度だけ位相が違っているのである。従って回路[D]は、3dB理想power splitterに位相回転素子あるいは無損失伝送線路(位相)を縦続接続したものと同等である(図85)。また回路[t]は、図86(これもBalunと呼ばれることがある)のように描くこともある。

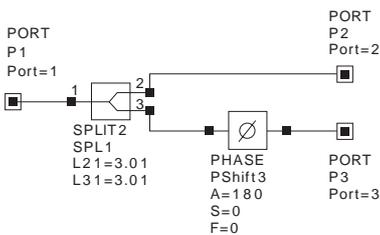


図85 回路 D の別表現

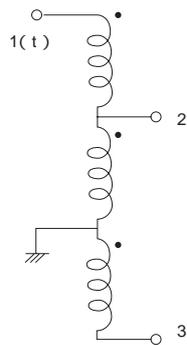


図86 回路 t の変形

結局、4ポート回路行列をモード変換してS_{cc}やS_{dd}を求めるということは、power splitterを用いて実測するのと同等のことを演算上で処理したことに相当する。

次回は「まとめ(最終回)」である。

注意: 記述が煩雑になるのを避けるため、行列の要素で自明な部分、あるいは必要の無い部分は「*」として省略した。

APPENDIX

4分割に区分けされた行列

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (\text{A} \cdot \cdot 1)$$

を考える。

(1) 足し算、引き算、掛け算

行列どうしの足し算、引き算、掛け算は、あたかも普通の行列のように演算できる。ただし、掛け算のときは行列が可換でないことに注意しなくてはならない。

(2) 行列式

$$G = D - CA^{-1}B \quad H = A - BD^{-1}C \quad (\text{A} \cdot \cdot 2)$$

とおくと、

$$|X| = |A| |G| = |A| |D - CA^{-1}B| \quad |X| = |D| |H| = |D| |A - BD^{-1}C| \quad (\text{A} \cdot \cdot 3)$$

と書ける。特殊な場合として、 $B=0$ または $C=0$ のときは、

$$|X| = |A| |D| \quad (\text{A} \cdot \cdot 4)$$

となる。対称区分けの場合、その中の小行列が可換であれば、(A・・3)式はもう少し簡単になる。

AとBが可換	$ X = DA - CB $
AとCが可換	$ X = AD - CB $
DとBが可換	$ X = DA - BC $
DとCが可換	$ X = AD - BC $

一般には

$$|X| = |AD - BC| \quad |X| = |A| |D| - |B| |C| \quad (\text{A} \cdot \cdot 5)$$

などの式は成り立たないので注意。また対称区分けのとき、

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + B| |A - B| \quad (\text{A} \cdot \cdot 6)$$

という公式も有名。

(3) 逆行列

A, Gが正方正則の場合、逆行列は、

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BG^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BG^{-1} \\ -G^{-1}CA^{-1} & G^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A} \cdot \cdot 7)$$

と表わせる。同様に、D, Hが正方正則ならば、

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} H^{-1} & -H^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}CH^{-1} & D^{-1} + D^{-1}CH^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A} \cdot \cdot 8)$$

となる。従って、A, D, G, Hが正方正則であれば、両者を混在させて、例えば、

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} H^{-1} & -A^{-1}BG^{-1} \\ -D^{-1}CH^{-1} & G^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A} \cdot \cdot 9)$$

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} H^{-1} & -H^{-1}BD^{-1} \\ -G^{-1}CA^{-1} & G^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A} \cdot \cdot 10)$$

と書くこともできる。対称区分けで、A, B, C, D全てが正則であれば、

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & (C - DB^{-1}A)^{-1} \\ (B - AC^{-1}D)^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A} \cdot \cdot 11)$$

と簡略化できる。

特殊な場合として、 $C=0$ のとき、(A・・7)と(A・・8)式は、

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A} \cdot \cdot 12)$$

$B=0$ のときは、

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A} \cdot \cdot 13)$$

となる。また、 $B=C=0$ のときは、

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A} \cdot \cdot 14)$$

となる。これら3式はA, Dが正則であれば成り立つ。

(4) その他

$${}^tX = \begin{bmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{bmatrix} \quad X^* = \begin{bmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{bmatrix} \quad (\text{A} \cdot \cdot 15)$$



まとめ

電子部品事業本部
藤城 義和

今回でこの連載も最終回である。そこで、まとめとして今まで述べてきた内容の中で、重要と思われるものを公式として列挙した。また現時点で判明している主な修正事項も記載した。

7-14 群の表現と回路行列

前節までの議論から、面对称な回路ではeven/odd (あるいはcommon/differential) というモード変換が有効であることがわかった。より複雑な対称性を持っている場合はどうなるのであろうか、本節ではそのことを考察してみよう。そのためには群論²⁶⁾の知識を援用する必要がある。ここでは回路図を幾何学的な図形とみなし、点群を応用してみる。

回路に対称性がある場合、回路行列はその対称性を反映した形となる。具体例で説明しよう。4ポート回路が図60にあるような

1, 2の2つの対称面を持っていたとする。その場合、回路行列 (S行列の例で示すがZ,Y行列も同じ,S行列の場合は各ポートの基準インピーダンスが等しい場合に限る) は対称操作の表現行列 D_1, D_2 と可換になるので、その要素には、(4・30)(4・31)式 (あるいは(4・32)(4・33)式) のような関係が成り立つ。従って、S行列は、

$$S = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} \quad (7 \cdot 216)$$

という形に限定される。1, 2の対称性を有している回路は点群の記号で言えば、 C_{2v} になる。従って、対称操作としてはその他に C_2 (180度の回転で、ポート1 ポート4、ポート2 ポート3という置換に相当する) が存在することになるが、(7・216) 式のS行列は、 C_2 から要請される条件、

$$S \cdot D_{C_2} = D_{C_2} \cdot S \quad D_{C_2} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{bmatrix} \quad (7 \cdot 217)$$

を自動的に満たしている。実は回路行列の形は群の生成元だけ (C_{2v} の場合 1 と 2 を生成元とすることができる) を考えておけば充分なのである。この場合を例にとって説明する。対称操作 C_2 は、 $C_2 = 1 \circ 2 (= 2 \circ 1)$ だから、S が D_1, D_2 と可換であれば、 D_{C_2} も

$S \cdot D_{C_2} = S \cdot D_1 \cdot D_2 = D_1 \cdot S \cdot D_2 = D_1 \cdot D_2 \cdot S = D_{C_2} \cdot S$ (7・218) のように、S と可換になる。

さて、適当なモード変換を施せば、このような特殊な形をした回路行列がブロック対角になることは、前節までにいくつかの例で確認した。それは群論の言葉で言えば、「電流、電圧 (i,v) あるいは波振幅 (a,b) を既約表現の基底に取り直せば、回路行列が独立な小回路行列の直和として表わされる」ということになる。どの

ような既約表現が存在するかは対称操作の表現行列を簡約すれば容易にわかる (指標を計算する際、対称操作で位置の変わらないポートのみをカウントすればよい)。またその基底 (基準モード) は、射影演算子などを適用すれば求めることができる。ここでは簡単な回路について、その結果だけを示す (表17)

表17を使って、前節までで扱った回路を群論的に解釈してみよう。最も簡単な例は、図33にある対称面を一つだけ持っている2ポート回路である。この場合の対称性は点群で言えば C_s であり、基準モードは $A_1 + A_2$ となる。これはeven/oddモードのことである。回路が平面に描かれており (通常そうだが) 裏面からも見ることができるならば、その対称性を C_2 (C_s と同型 (表18参照)) と捉えてもよい。その場合、基準モードは $A+B$ と表現されることになるが、実質的には変わらない。また 2対称性だけを有している4ポート回路 (図60参照) も点群としては C_s になる。この場合の基準モードは $2A_1 + 2A_2$ である。2が付いているのは、回路行列が完全に対角化されない (ブロック対角にはなる) ことを意味している (例: (7・138) 式)。4ポート回路が、さらに 1対称性も合わせ持っているのであれば、点群としては C_{2v} になるので、基準モードに $A_1 + A_2 + B_1 + B_2$ をとって完全な対角化を実現することが可能となる。(D_2 や C_{2h} と捉えても同様な結果になる) 以上の例からわかるように、全対称表現 (A とか A_1, A_2 など。(拡張された) evenモード。分子振動で言えばbreathingモード) は基準モードの一つとして必ず含まれる。

簡約の際、注意しなければならないのは複素共役表現の扱いである。Mullikenの記法では互いに複素共役な表現を一括して2次元表現Eとして表わすが、本来それは2つの1次元表現である。にもかかわらず2次元と捉えるのは、回路が時間反転対称性を有していれば、両表現が縮重するからである。無損失回路はそれに該当する。しかし、回路に抵抗が含まれているときは、一般には時間反転対称とは言えない。そのような場合でも回路が相反であれば縮重する (と思う) 巡回群 C_n の例で見よう。巡回対称なnポート回路の基準モードは、 $A + (B) + E_1 + E_2 + \dots$ である (Bはnが偶数のときのみ現われる、n/2ではE表現はない) APPENDIX に示すように、それらの基準モードにモード変換すると、S行列は対角化され、その固有値は相反回路の場合、少なくともE表現内では同一になる。そのことを利用すれば、モード変換の行列を実行列

ポート数	回路図	点群	回路行列	基準モード	モード変換の行列
2		C_s	$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$	$A' + A''$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = Q$
3		C_s	$\begin{bmatrix} a & c & c \\ b & d & e \\ b & e & d \end{bmatrix}$	$2A' + A''$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$
		C_3	$\begin{bmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{bmatrix}$	$A + E$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & & \\ 1 & & \end{bmatrix}$ (Fortescue変換) $= \exp(j2\pi/3)$ 相反な場合の例 $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1/\sqrt{2} & \sqrt{3/2} \\ 1 & -1/\sqrt{2} & -\sqrt{3/2} \end{bmatrix}$ (Clark変換)
		C_{3v}	$\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$	$A_1 + E$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & & \\ 1 & & \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1/\sqrt{2} & \sqrt{3/2} \\ 1 & -1/\sqrt{2} & -\sqrt{3/2} \end{bmatrix}$
4		C_s	$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$	$2A' + 2A''$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
		C_{2v}	$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$	$A_1 + A_2 + B_1 + B_2$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} Q & Q \\ Q & -Q \end{bmatrix}$
		C_4	$\begin{bmatrix} a & d & c & b \\ b & a & d & c \\ c & b & a & d \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$	$A + B + E$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}$ 相反な場合の例 $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
n		C_n	巡回行列	$A + (B) + E_1 + E_2 + \dots$ *Bはnが偶数のときのみ現われる	$P_{xy} = \frac{(x-1)(y-1)}{j\sqrt{n}} = \exp(j2\pi/n)$ $x, y = 1, 2, \dots, n$ 相反な場合、E表現は縮重するので、線形結合をとって実行列にできる

表17 簡単な回路に群論を適用する

に取ることが可能となる。複素共役表現の場合、モード変換の行列は一般には実行列になるとは限らないので、本章のモード変換の理論からは逸脱している。しかしじつは、複素行列であっても、それがUnitary行列と対角行列の積であれば(すなわち(7・16)、(7・17)式で、Uを直交行列ではなく、Unitary行列に拡張しても)本章で展開したモード変換の理論は、そのまま成り立つのである。表17に挙げた行列は全てUnitaryであるから、その条件を満たしている。そうは言っても、実数化しておいた方が扱いやすいし、また物理的な意味が捉えやすいので、できるならば実行列の範囲内で事を済ませたい。

面対称な回路は、いわゆる二等分定理が成り立つ。その定理をもっと複雑な対称性にまで拡張することは可能であるが、ここでは割愛する。文献参照⁽⁸⁾。

より抽象性の高い群についても同様の手続きで、既約表現とその基準モードを求めることは可能であるが、位数が低ければ、同型対応を使い点群の言葉で解釈した方がわかりやすい(表18参照)。

位数	点群	巡回群	対称群,交代群	正多面体群
1	C_1	Z_1	S_1	
2	$C_2, C_s = C_{1h}, C_i = S_2$	Z_2	S_2	
3	C_3	Z_3	A_3	
4	C_4, S_4	Z_4		
	D_2, C_{2v}, C_{2h}	$Z_2 \times Z_2$		D_2
6	C_6, S_6, C_{3h}	$Z_6 = Z_3 \times Z_2$		
	D_3, C_{3v}		S_3	D_3
8	D_4, C_{4v}, D_{2d}			D_4
	C_{4h}	$Z_4 \times Z_2$		
	D_{2h}	$Z_2 \times Z_2 \times Z_2$		$D_2 \times Z_2$
12	T		A_4	$P(4)$
	$D_6, C_{6v}, D_{3h}, D_{3d}$			$D_6 = D_3 \times Z_2$
	C_{6h}	$Z_6 \times Z_2$		
16	D_{4h}			$D_4 \times Z_2$
24	O, T_d		S_4	$P(6), P(8)$
	T_h			$T \times Z_2$
	D_{6h}			$D_6 \times Z_2$
48	O_h			$O \times Z_2$
60	I		A_5	$P(12), P(20)$
120	I_h			$I \times Z_2$

注意：Sという記号は点群と対称群で使っているが、それらは別もの

表18 点群とその同型の群

(a) .s2p

# MHz	S	MA	R	50					
0.30000	0.99950	-0.03754	0.00020	89.7291	0.00020	93.8341	0.99971	-0.02354	
0.31523	0.99955	-0.03746	0.00020	89.8781	0.00020	89.0219	0.99992	-0.02312	
0.33123	0.99947	-0.03879	0.00021	91.1617	0.00021	92.6130	0.99992	-0.03502	
.....									
6000.00	0.17892	-107.756	0.97259	-16.4840	0.97174	-16.5683	0.18224	-101.842	

(b) .s4p

# MHz	S	MA	R	50					
0.30000	0.04085	81.8255	0.99518	-2.33253	0.04094	84.7155	0.04037	-95.3482	
	0.99470	-2.38139	0.04102	81.8151	0.04037	-95.3565	0.04087	84.6938	
	0.04090	84.6939	0.04040	-95.3201	0.04103	81.8120	0.99485	-2.35721	
	0.04039	-95.4018	0.04087	84.7098	0.99455	-2.36145	0.04088	81.7815	
0.31523	0.04291	81.7110	0.99517	-2.47074	0.04299	84.4620	0.04244	-95.6073	
	0.99433	-2.48357	0.04309	81.7209	0.04243	-95.6350	0.04294	84.4636	
	0.04296	84.4576	0.04244	-95.5900	0.04307	81.6769	0.99464	-2.48074	
	0.04241	-95.6175	0.04292	84.4738	0.99489	-2.48896	0.04289	81.6199	
0.33123	0.04505	81.5809	0.99475	-2.58650	0.04516	84.2012	0.04454	-95.9161	
	0.99414	-2.60717	0.04524	81.5621	0.04453	-95.8883	0.04507	84.1933	
	0.04511	84.1682	0.04458	-95.9020	0.04523	81.5394	0.99431	-2.59760	
	0.04453	-95.9005	0.04508	84.1958	0.99404	-2.60423	0.04507	81.5084	
.....									
6000.00	0.64190	-94.4049	0.16883	-51.9762	0.18705	-98.4853	0.18030	3.30675	
	0.16883	-51.9762	0.68411	-102.066	0.24601	-0.42389	0.20136	-119.646	
	0.18702	-98.4247	0.24601	-0.39827	0.11250	-99.3618	0.13213	-43.5281	
	0.18030	3.30675	0.20136	-119.646	0.12749	-43.0930	0.61952	-96.9254	

表19 TDK S-Parameter Data Libraryの中身(例)
(a) 2ポートファイル, (b) 4ポートファイル

8. Sパラメータファイル

本章ではSパラメータファイルのファイル形式について簡単に解説する。TDKが公開しているTDK S-Parameter Data Libraryは各種電子部品のSパラメータのデータ集である。そこに収められているデータファイルは、いわゆるTouchstoneフォーマットという形式で書かれたテキストファイルになっている。TouchstoneというのはAgilent Technology社の高周波シミュレータの名前であり、Touchstoneフォーマットは、その中で標準的に使われているファイル形式のことである。

Touchstoneフォーマットについて述べる⁽²⁷⁾。ファイル名にはsnpという拡張子を付ける。nは1~9でポート数を表わす(10~99ポートであれば、s10,s11,...,s99のように付ける)。Sパラメータファイルの中身を表19に示す。#で始まる行は、次行以下の数値に関する条件を記述している。その文法を表20に示す。

例	規格
MHz	周波数の単位。Hz/kHz/MHz/GHz/THz/PHzから選択する。
S	回路行列の種類。S/Z/YはそれぞれS行列、Z行列、Y行列を示す。2ポートであれば、その他にG,H行列も使える。
MA	複素数の表現形式。MAはMagnitude/angleのこと。すなわち絶対値と位相という2つの実数の組(極形式)で複素数を表わす。その他、R(real/imaginary)、DB(dB/angle)という形式も可。ただしDBはSパラメータのみに適用(絶対値をdB単位、すなわち20log S _{ij} で表わす)位相の単位は「度」。その他(一応dBを除く)の単位は無名数である(注意:インピーダンスやアドミタンスは基準インピーダンスで規格化している。つまり規格化Z行列、規格化Y行列ということ)
R 50	基準インピーダンス/ を示す。R 50は、50 ということ。

表20 #行の文法

数値は、複数の列で構成されている。列の区切りは、スペース

が一般的なようだが、tabでもよい(コンピュータにもよる)まず2ポートの例(表19(a))を見てみよう。一番左の列は周波数である。この場合は300kHz~6GHz(0.3MHz~6000MHz)になっている。残りの8列は、その周波数でのSパラメータ値である。2ポートの場合は、

S₁₁,S₂₁,S₁₂,S₂₂

の順に並んでいる。各Sパラメータは2つの実数(この例ではMA形式だから絶対値と位相)で表わされているので、全部で8列となる(周波数を入れると9列)。4ポートの場合(表19(b))は、一つの周波数に対して、16個のSパラメータを記述する必要があるが、それらを、

S₁₁,S₁₂,S₁₃,S₁₄

S₂₁,S₂₂,S₂₃,S₂₄

S₃₁,S₃₂,S₃₃,S₃₄

S₄₁,S₄₂,S₄₃,S₄₄

という順序(行列の並びと同じ)で4行に書く。S₁₁~S₁₄は周波数と同じ行に書くので、その行だけ9列になる。その他、1ポートや3ポート、5ポート以上も4ポートの場合に準ずる。従って、各周波数に対して1ポートは一行、3ポートは3行で書く(1ポートの場合は2ポートの記述方法と同じと思ってもよい)。5ポート以上の場合、途中で改行を入れて、一行にはパラメータを4つ(8列)までしか書かないようにする。

周波数範囲やその間隔は任意であり、必要な個数だけ行を書けばよい。ただし、多くの場合、周波数は低い順に並んでいないとはならない。

数値計算する際には位相の扱いに気をつける必要がある。位相は、-180度~180度に折りたたまれているので、補間するときなどは、それを考慮してR形式に変換するなどして計算した方がよい。

9. 公式

3～7章にかけて、電子部品の評価方法をその基本原理から述べてきた。そのため、原理の理解には必要であったのだが、実際に使える式の他にそれを導くための中間の式が混ざっている。そこで、評価方法として重要と思われる公式を抜き出した。式番号には初出のときのものも併記した。

● 2端子部品のインピーダンス

2端子部品のインピーダンスZをseries-thru配置のSパラメータから換算する。

$$Z = \frac{1 + S_{11} + S_{22} + |S|}{1 - S_{11} + S_{22} - |S|} \quad (9.1) \text{ (6.12)}$$

これは、正確に言えば、ポート2を接地させたときの入力インピーダンスである。シミュレータで計算するときも、そのように求める(図22)。計算原理は反射係数法と同じであり、従って、インピーダンスが50Ωから離れてくると精度が落ちる。

● 伝送線路の特性インピーダンス

伝送線路の特性インピーダンスZcを2ポートSパラメータから求める。

$$Z_c = \sqrt{\frac{(1 + S_{11} + S_{22} + |S|)(1 + S_{11} - S_{22} - |S|)}{(1 - S_{11} + S_{22} - |S|)(1 - S_{11} - S_{22} + |S|)}} \quad (9.2) \text{ (6.20)}$$

これは2ポート部品の映像インピーダンスZ₁₁を計算していることに相当する。原理的には、Open/Short法と同じである。シミュレータでの計算は図22に準ずる。なお適用に際しては10章の正誤表も参照のこと。

● 基準インピーダンスの変更

基準インピーダンスを変更したS行列S'を求める。

$$S' = W^{-1}(S - \Gamma)(I - \Gamma S)^{-1}W \quad (9.3) \text{ (5.3)}$$

W, Γは(5.4)(5.5)式参照。2ポートの場合を書き下したのが、(5.8)(5.9)式である。シミュレータで求めるときは、理想トランスを用いる(図15)。

● モード変換

single-endのS行列からCommon/Differentialモード(even/oddモードでも同じ)に変換したS行列S'を求める。

$$S' = \begin{bmatrix} S_{cc} & S_{cd} \\ S_{dc} & S_{dd} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S_{11} + S_{21} + S_{12} + S_{22} & S_{11} + S_{21} - S_{12} - S_{22} \\ S_{11} - S_{21} + S_{12} - S_{22} & S_{11} - S_{21} - S_{12} + S_{22} \end{bmatrix} \quad (9.4) \text{ (7.133)}$$

(9.4)式の各要素は一般には、区分けされた小行列を表わしているが、2ポート部品の場合はスカラーに還元される((7.55)式)。シミュレータで求めるには、図61のようにする。

(ほぼ)対称な部品は、対になるポートに同相(Common)の、あるいは逆相(Differential)の信号を入れたときの応答でその特性を把握したい。power splitterやBalunを使ってハード的に実測することも可能であるが、single-endのS行列(各ポートを基準インピーダンスで終端したときの1ポートずつのSパラメータ)がわかっているならば、それから計算(上式)やシミュレータを使っ

て、導くことができる。それは理想power splitterや理想Balunをソフト上で実現したことに相当する。

● 電力損失の評価

ポートyに入射した電力のうち、どのぐらいが回路内で吸収(消費)されたかを求める。

$$U_y = \frac{|S_{xy}|^2}{|S^* S|_{yy}} \quad (9.5)$$

簡単のため2ポートの場合で説明しよう。ポート1に入射した電力の内、|S₁₁|²が反射分、|S₂₁|²が透過分であるから、残りの1 - U = 1 - (|S₁₁|² + |S₂₁|²)が吸収分ということになる。従って、U = |S₁₁|² + |S₂₁|²は吸収量しなかった量を指している。Uは0 < U < 1で、大きい(1に近い)ほど電力の損失が少ない。Uまたは1 - U、どちらでも電力損失の定量的な評価は可能であるが、損失が大きくて、またそれをdB表示する場合には、1 - UよりUを使った方が見やすい。この公式は、モード変換や基準インピーダンスの変更をしたS行列にも適用できる。ただし、その値は無損失のとき(Uは常に1)を除いて、一般には同じにならないことに注意。

10. おわりに

6回の連載を通じ、電子部品の評価ということを中心にSパラメータについて述べてきた。その中で、多くの有用な式とシミュレータの活用方法を紹介した。現在はシミュレーション万能の時代である。とは言っても、というよりむしろ、そうだからこそ基礎は重要だと思う。この連載では、基準インピーダンスというものをごバックボーンに据え、話を展開してきた。Sパラメータを理解し、応用するには、それが鍵だと思ったからである。Sパラメータにとって基準インピーダンスとはどんな意味があるのか、そしてそれをどう使えば良いのか、色々な角度から考察したつもりである。

長かった連載も終わりに近づき、今振り返ってみれば、こんなものが役に立つのか、間違い等でご迷惑をかけていないか一抹の不安が頭をよぎる。本稿に関し、ご意見やご感想、間違いの指摘などございましたら、[こちら](#)からお問い合わせください。ちなみに現在までに判明している主な修正事項については、正誤表を以下に記します。

Sパラメータによる電子部品の評価 第二回 「S行列の例」

- vol.32 の p31 (4・56)式

$$(誤) \quad \frac{\omega_{cut-off}}{b} = \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + 1}$$

$$(正) \quad \frac{\omega_{cut-off}}{b} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + 1}}$$

Sパラメータによる電子部品の評価 第四回 「モード変換」

- vol.34 の p31 (A・ 5)式

$$(誤) \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & j & & \\ & & 1/\varepsilon_+ & \\ & & & 1/\varepsilon_- \end{bmatrix}$$

$$(正) \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -j & & \\ & & \varepsilon_+ & \\ & & & \varepsilon_- \end{bmatrix}$$

- vol.34 の p31 (A・ 6) , (A・ 7)式

$$(誤) \quad \begin{aligned} j &\Rightarrow \theta_2 = -\pi/2 \\ 1/\varepsilon_{\pm} &\Rightarrow \theta_{\pm} = \frac{\arg D_{\pm}}{2} \end{aligned}$$

$$(正) \quad \begin{aligned} -j &\Rightarrow \theta_2 = \pi/2 \\ \varepsilon_{\pm} &\Rightarrow \theta_{\pm} = -\frac{\arg D_{\pm}}{2} \end{aligned}$$

- vol.34 の p31 図 51 : 以下の図に差し替えてください

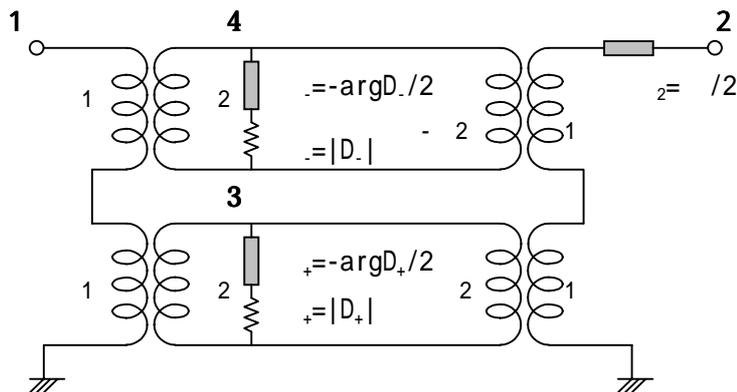


図 51 複素数巻数比の理想トランスの合成(1)

正誤表

2002/4/4

- vol.34 の p31 下から 7 行目

(誤)それらに $= - / 2$ を代入すればよい。 (正)それらに $= / 2$ を代入すればよい。

- vol.34 の p31 (A・ 9)式

(誤) $\Gamma_3 = D_+ / \epsilon_+^2$	(正) $\Gamma_3 = D_+ \epsilon_+^2 = D_+$
$\Gamma_4 = D_- / \epsilon_-^2$	$\Gamma_4 = D_- \epsilon_-^2 = D_-$

- vol.34 の p32 (A・ 10)式

(誤) $\hat{Z}_3 = 1 / jn$	(正) $\hat{Z}_3 = j / n$
$\hat{Z}_4 = j / n$	$\hat{Z}_4 = 1 / jn$

- vol.34 の p32 図 54 : 以下の図に差し替えてください

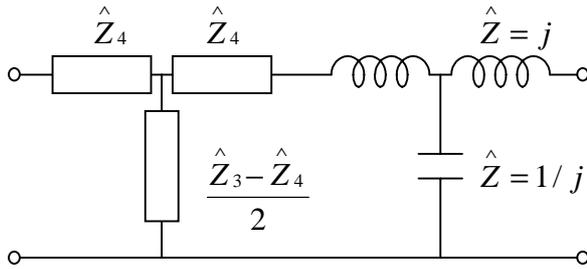


図 54 複素数巻数比の理想トランスの合成(2)

- vol.34 の p32 図 55 : 以下の図に差し替えてください

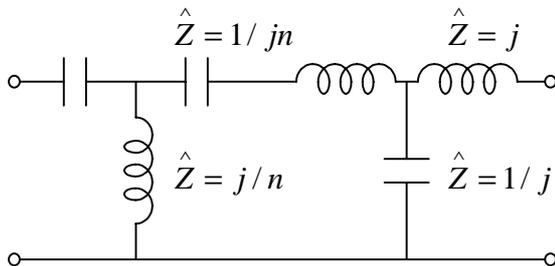


図 55 理想トランスの合成 (n>0 のときの図記号で示した)

- vol.34 の p32 (16)モード変換と変換回路に関するその他の文献
: 以下の文献を追加してください

David E.Bockelman,William R.Eisenstadt, “Combined Differential and Common-Mode Scattering Parameters : Theory and Simulation”, IEEE Trans. MTT, pp1530-1539, vol.43, No.7, 1995 July

山中健,柳川光一, 「Sパラメータによる平衡ケーブルのパラメータ測定」, 信学技報 EMCJ92-2, pp9-16, 1992

K.Yanagawa,J.Cross, ”Modal Decomposition (Non-Balun) Measurement Technique : Error Analysis and Application to UTP/STP Characterization to 500MHz”, International Wire and Cable Symposium Proceedings pp126-133, 1995

本田克也,貝崎康裕,篠原慎一,佐藤利三郎, ”コモンモードチョークコイルのバランスモードでのインピーダンス解析”, 信学技報 EMCJ97-103, pp27-32, 1998-3

Sパラメータによる電子部品の評価 第五回 「モード変換(続)」

- vol.35 の p18 表 11 の 式

(誤)

$$S = \begin{bmatrix} [(\hat{A} + \hat{B})^{-1} + (\hat{C} + \hat{D})^{-1}]^{-1} [-(\hat{A} + \hat{B})^{-1} + (\hat{C} + \hat{D})^{-1}] & [(\hat{A} + \hat{B})^{-1} + (\hat{C} + \hat{D})^{-1}]^{-1} [(\hat{A} + \hat{B})^{-1}(\hat{A} - \hat{B}) - (\hat{C} + \hat{D})^{-1}(\hat{C} - \hat{D})] \\ 2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D})^{-1} & (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D})^{-1}(-\hat{A} + \hat{B} - \hat{C} + \hat{D}) \end{bmatrix}$$

(正)

$$S = \begin{bmatrix} (\hat{A} + \hat{B} - \hat{C} - \hat{D})(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D})^{-1} \left((\hat{A} - \hat{B} - \hat{C} + \hat{D}) - (\hat{A} + \hat{B} - \hat{C} - \hat{D})(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D})^{-1}(\hat{A} - \hat{B} + \hat{C} - \hat{D}) \right) / 2 \\ 2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D})^{-1} & -(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D})^{-1}(\hat{A} - \hat{B} + \hat{C} - \hat{D}) \end{bmatrix}$$

- vol.35 の p19 (7・114)式

(誤)
$$S = \begin{bmatrix} S_{M11} + S_{M12}(S_{N11}^{-1} - S_{M22})^{-1}S_{M21} & S_{M12}(I - S_{N11}S_{M22})^{-1}S_{N12} \\ S_{N21}(I - S_{M22}S_{N11})^{-1}S_{M21} & S_{N22} + S_{N21}(S_{N22}^{-1} - S_{N11})^{-1}S_{N12} \end{bmatrix}$$

(正)
$$S = \begin{bmatrix} S_{M11} + S_{M12}(S_{N11}^{-1} - S_{M22})^{-1}S_{M21} & S_{M12}(I - S_{N11}S_{M22})^{-1}S_{N12} \\ S_{N21}(I - S_{M22}S_{N11})^{-1}S_{M21} & S_{N22} + S_{N21}(S_{M22}^{-1} - S_{N11})^{-1}S_{N12} \end{bmatrix}$$

Sパラメータによる電子部品の評価 第六回 「まとめ」

- vol.36 の p21 上から 3 行目：赤字部分を追記してください

(誤) しかしじつは、複素行列であっても、それが Unitary 行列と対角行列の積であれば(すなわち(7・16), (7・17)式で、 \mathbf{U} を直交行列ではなく、Unitary 行列に拡張しても)、本章で展開したモード変換の理論は、そのまま成り立つのである。

(正) しかしじつは、複素行列であっても、それが Unitary 行列と対角行列の積であれば(すなわち(7・16), (7・17)式で、 \mathbf{U} を直交行列ではなく、Unitary 行列に拡張しても)、本章で展開したモード変換の理論は、そのまま成り立つのである。ただし、以下の2点については修正が必要である。元の回路が相反でも、モード変換するとその性質は引き継がれない。

図 30 の変換回路は、理想トランスを複素化理想トランス(A・12), (A・13)式に置き換える必要がある。

Sパラメータによる電子部品の評価 第5回 「モード変換(続)」

- vol. 35 の p22 (7・153) 式

$$\text{(誤)} \quad \mathbf{S}_z = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{13} \\ S_{31} & S_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{12} & S_{14} \\ S_{32} & S_{34} \end{bmatrix} \left(\frac{\hat{Z}_d + 2}{\hat{Z}_d - 2} \begin{bmatrix} \hat{Z}_d & -2 \\ -2 & \hat{Z}_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{22} & S_{24} \\ S_{42} & S_{44} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} S_{21} & S_{23} \\ S_{41} & S_{43} \end{bmatrix}$$

$$\text{(正)} \quad \mathbf{S}_z = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{13} \\ S_{31} & S_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{12} & S_{14} \\ S_{32} & S_{34} \end{bmatrix} \left(\frac{1}{\hat{Z}_d - 2} \begin{bmatrix} \hat{Z}_d & -2 \\ -2 & \hat{Z}_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{22} & S_{24} \\ S_{42} & S_{44} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} S_{21} & S_{23} \\ S_{41} & S_{43} \end{bmatrix}$$

・・・梅村哲也氏の指摘による

発行 2006.August.10

改訂 2007.May.23



ご注意

- ◆ 本アプリケーションノートで表示されている特性データ、シミュレーション結果などは、製品の特性を保証するものではありません。
- ◆ 本アプリケーションノートに掲載された内容によっておきる損害については、TDK は一切の責任を負いませんので、その旨ご了承ください。
- ◆ 本アプリケーションノートに記載されている社名・製品名などは各社の登録商標です。
- ◆ 本アプリケーションノートで使用している画面およびデータは連載当時のものです。
- ◆ 改良その他により予告なく変更する場合があります、実際のものとは異なることがあります。